

# BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM



## DÖNTÉSELŐKÉSZÍTŐ MÓDSZEREK A KÖZLEKEDÉSBEN

**Dr. SIPOS Tibor Ph.D.**

**Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.**

**SZABÓ Zsombor**

**2019**



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS  
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

# UTAZÓÜGYNÖK PROBLÉMA



**BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS**  
**FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING**

# Bevezetés

---

- A fő ok, hogy a korlátozás és szétválasztás technikájáról beszéljünk, hogy megoldhassuk az utazóügynök problémát (travelling salesman problem – TSP)
- A TSP az egyik legfontosabb optimalizálási feladat



# Fontosság

---

- Clay Mathematics Institute – Millenniumi problémák
- Hét fontos probléma, a melyek még megoldatlanok
- $P = NP$  bizonyítása, vagy elvetése
- TSP az egyik legfontosabb NP feladat (exponenciális idejű) amelynek a polinomiális idejű megoldását keresik
- A bizonyításért, vagy elvetésért egymillió dolláros jutalom jár
- <http://www.claymath.org/millennium-problems>
- <http://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem>



# Leírás

---

- A TSP során adott  $n$  hely a térben (például települések), és az ellenállás a pontok között
- A feladat azon legrövidebb út megkeresése, amely az összes helyszínt érinti



# Formalizálás

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall i, j$$

- Fontos, hogy van egy további feltétel is, amelyet nehéz formalizálni
- Ha a mátrixot egy gráfként értelmezzük, akkor a kiválasztott élek pontosan egy kört adnak



# Módszer

---

- Négy lépés:
  - Mátrix redukció: A mátrix minden egyes eleméből levonjuk az adott sorhoz tartozó legkisebb elemet. Ugyanezt az eljárást alkalmazzuk az oszlopokra is.
  - Minden egyes nulla elemre kiszámolunk egy  $r$  értéket
  - Kiválasztjuk az  $r$  értékek közül a legnagyobbat
  - Korlátozás és szétválasztás módszere
    - Két lehetséges eset
    - A kiválasztott élel bevesszük, vagy kizárjuk



# Példa

	A	B	C	D
A	M	6	2	4
B	1	M	2	7
C	4	8	M	5
D	5	2	6	M





# Táblázatos forma

---

- Fontos megjegyezni, hogy a mátrix főátlóinak elemei nem választhatók, így azokat  $M$  jellel jelöljük



# Redukált mátrix

	A	B	C	D
A	M	4	0	1
B	0	M	1	5
C	0	4	M	0
D	3	0	4	M



# *r* értékek

---

- A második lépés, hogy kiszámoljuk az  $r$  értékeket az összes nulla cellára

$$r_{\hat{i}\hat{j}} = \min_j c_{\hat{i}j} + \min_i c_{i\hat{j}}$$

- A képlet segítségével a következő  $r$  értékek adódnak

$$r_{AC} = 1 + 1 = 2$$

$$r_{BA} = 0 + 1 = 1$$

$$r_{CA} = 0 + 0 = 0$$

$$r_{CD} = 0 + 1 = 1$$

$$r_{DB} = 3 + 4 = 7$$



# Korlátozás és szétválasztás

---

- A korlátozás és szétválasztás módszeréhez szükség van egy kezdő korlát meghatározására
- A kezdő korlát a feladatra a mátrix redukció során előállt sor- és oszlopminimumok összege ( $Z^* = 10 = k_0$ )
- A szétválasztási lépés során két lehetséges eset van; a kiválasztott él bevétele, vagy eliminálása



# Korlátozás és szétválasztás – Eliminálás

---

- Az ág korlátja a következő lesz

$$k_l = k_{l-} + r_{ij}$$

- Az eliminált cellát M jellel jelöljük, majd a mátrix redukció következik



# Korlátozás és szétválasztás – Eliminálás

	A	B	C	D
A	M	4	0	1
B	0	M	1	5
C	0	4	M	0
D	3	M	4	M



# Korlátozás és szétválasztás – Bevétel

---

- Ha a kiválasztott éleket bevezetjük a rendszerbe, akkor maga a cella ( $c_{\hat{i}\hat{j}}$ ), a teljes sor, a teljes oszlop és a  $c_{i=\hat{j},j=\hat{i}}$  cellát  $M$  értékre kell állítani
- A korlát nem fog nőni, csak ha lesz olyan sor vagy oszlop a kizárások után, amelyben nincs nulla elem
- Mivel nincs nulla értékű cella egyik sorban és oszlopban sem a  $k$  értéke nem fog változni



# Korlátozás és szétválasztás – Eliminálás

	A	B	C	D
A	M	M	0	1
B	0	M	1	M
C	0	M	M	0
D	M	M	M	M





# Korlátozás és szétválasztás – Kizárás

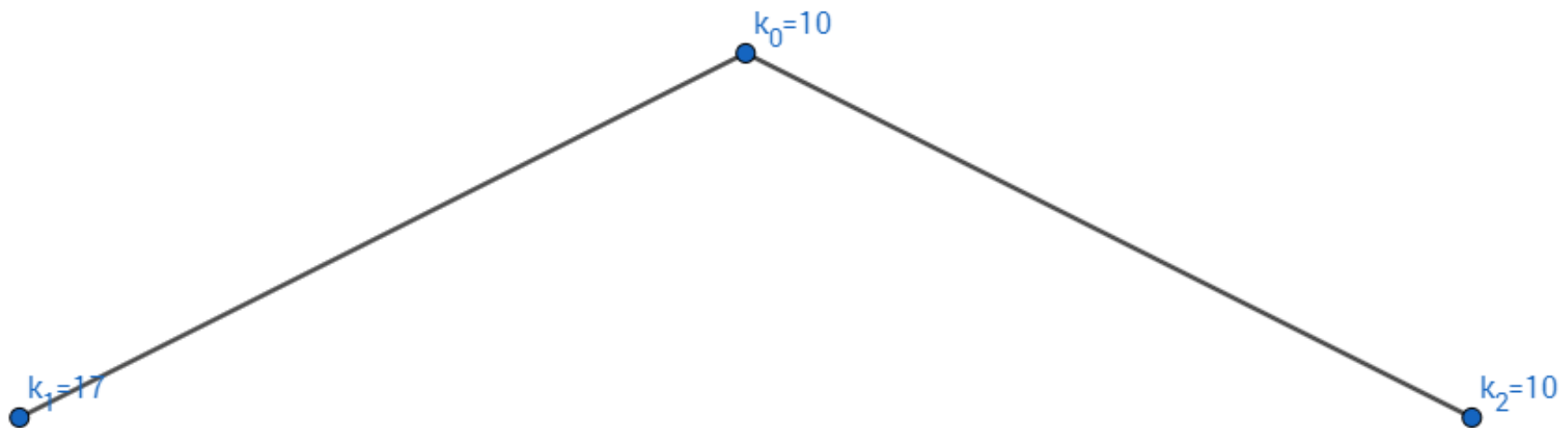
---

- Néhány eltérés szükséges
- A TSP során a  $Z^*$  helyett a  $k$  értékeket alkalmazzuk
- A nemmegengedhető alfeladat kritériuma továbbra is kizáró feltétel
- A kizárási lépés során az alacsonyabb korláttal rendelkező alfeladatot kell választani



# Első lépés – Döntési fa

---



# Második lépés – Kezdőmátrix

	A	B	C	D
A	M	M	0	1
B	0	M	1	M
C	0	M	M	0
D	M	M	M	M



# Második lépés – $r$ értékek

---

- No more matrix reduction is needed
- $r$  values are ought to be calculated

$$r_{AC} = 1 + 1 = 2$$

$$r_{BA} = 0 + 1 = 1$$

$$r_{CA} = 0 + 0 = 0$$

$$r_{CD} = 0 + 1 = 1$$

- AC cell should be used
- $L_3$ : AC cell is eliminated ( $k_3 = 12$ )
- $L_4$ : AC cell is used ( $k_4 = 10$ )



# Második lépés – Kiválasztott cella

	A	B	C	D
A	M	M	0	1
B	0	M	1	M
C	0	M	M	0
D	M	M	M	M



# Második lépés – Eliminálás

	A	B	C	D
A	M	M	M	1
B	0	M	1	M
C	0	M	M	0
D	M	M	M	M

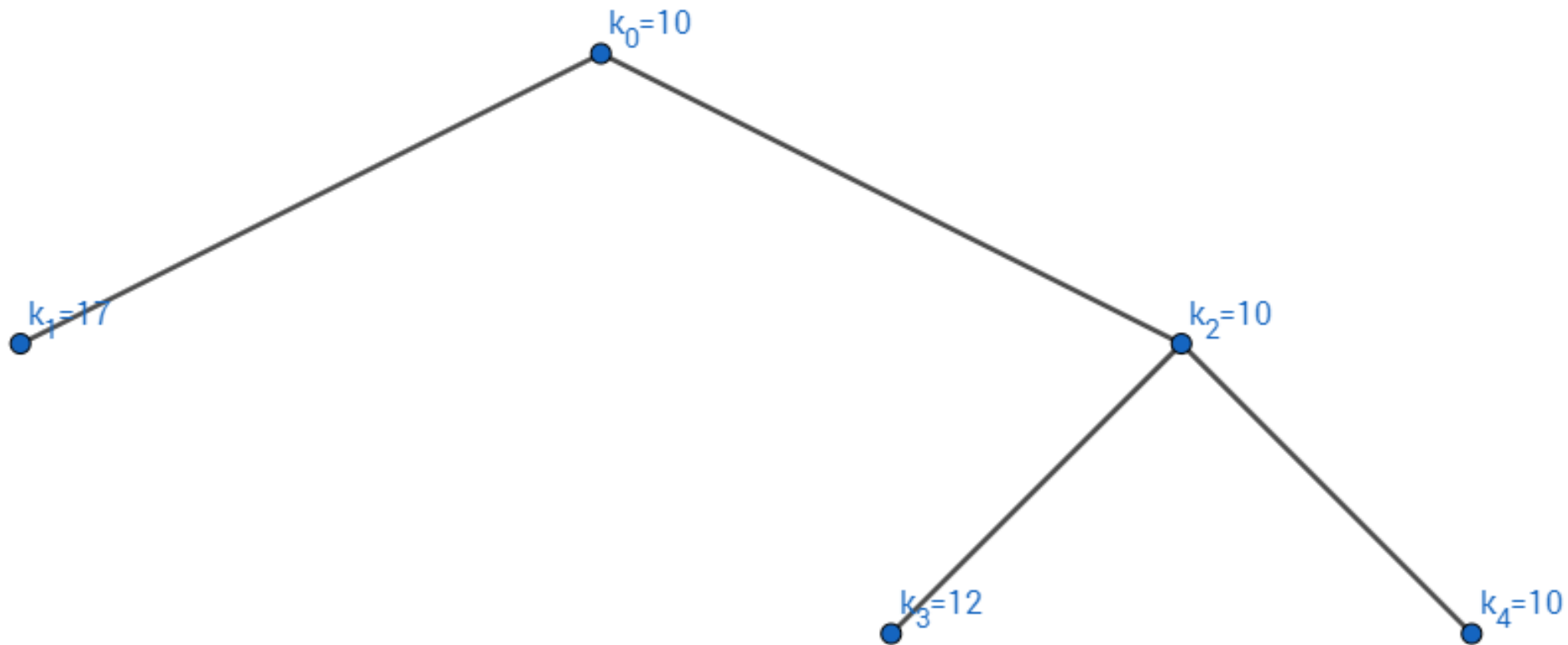


# Második lépés – Bevétel

	A	B	C	D
A	M	M	M	M
B	0	M	M	M
C	M	M	M	0
D	M	M	M	M



# Második lépés – Döntési fa





# Harmadik lépés – Kezdő mátrix

	A	B	C	D
A	M	M	M	M
B	0	M	M	M
C	M	M	M	0
D	M	M	M	M



# Harmadik lépés – Konklúzió

---

- Már csak két lehetséges cella maradt, amelyek pont a hiányzó élek a körből
- Így alakul ki az optimális megoldás:  
$$D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$$
- Az új aktuális megoldás  $k_4 = 10$  így a magasabb korláttal rendelkező ágak kizárhatók



# Optimális megoldás: $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$

	A	B	C	D
A	M	6	2	4
B	1	M	2	7
C	4	8	M	5
D	5	2	6	M



# Optimális megoldás : $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$

	A	B	C	D
A	M	6	2	4
B	1	M	2	7
C	4	8	M	5
D	5	2	6	M



# Optimális megoldás : $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$

	A	B	C	D
A	M	6	2	4
B	1	M	2	7
C	4	8	M	5
D	5	2	6	M



# Optimális megoldás : $D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$

	A	B	C	D
A	M	6	2	4
B	1	M	2	7
C	4	8	M	5
D	5	2	6	M



# BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.

Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.

SZABÓ Zsombor

2019



*email: [szabo.zsombor@mail.bme.hu](mailto:szabo.zsombor@mail.bme.hu)*

## KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET!



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS  
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING