BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

MŰEGYETEM 1782

DÖNTÉSELŐKÉSZÍTŐ MÓDSZEREK A KÖZLEKEDÉSBEN

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.

Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.

SZABÓ Zsombor

2019

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

KORLÁTOZÁS ÉS SZÉTVÁLASZTÁS (BRANCH AND BOUND) MÓDSZER

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Általános leírás

- A korlátozás és szétválasztás módszerét a bináris és az egészértékű programozási problémák megoldásához alkalmazzák
  - A szimplex módszer során nem garantálható, hogy a változók binárisak vagy egészértékűek legyenek
  - Jó megoldás lehetne a kerekítés, de az csak egy közelítő megoldást ad
- A megoldási metódus alapötlete, hogy bármely döntési változó csak véges sok megengedhető értéket vehet fel

Módszer

- Általános leírás: egy döntési változót kiválasztunk, a lehetséges eseteket rögzítjük, és az így kialakult eseteket elemezzük
  - Például bináris esetben a döntési változó egyszer 1, egyszer pedig 0 értéket vesz fel
- Egy döntési fa épül fel, amelynek ágai az egyes lehetséges kimenetelek, amelyek a döntési változók beállításával állnak elő

Módszer – Lépések

- Az iteráció előtt két fontos feladat van
  - Az aktuális legjobb megoldás beállítása $Z^* = -\infty$ vagy $Z^* = \infty$ attól függően, hogy minimalizálási, vagy maximalizálási feladatról beszélünk
  - Az LP relaxáció megoldása, úgy hogy a binaritási feltételeket elhagyjuk és új feltételeket (nagyobb egyenlő, és kisebb egyenlő feltételek a döntési változók lehetséges értékeire) vezetünk be
- Ezután kezdhető el a három lépéses iteráció
  - Korlátozás (Branching)
  - Szétválasztás (Bounding)
  - Kizárás (Fathoming)

Módszer – Korlátozás és szétválasztás

- Szétválasztás: ha a kiválasztott döntési változó n különböző értéket vehet fel, akkor n alfeladat (LP relaxáció) alakul ki
- Korlátozás: az LP relaxáció megoldása
  - Az LP relaxáció segítségével egy korlát alakul ki az összes ágra

Módszer – Kizárás

- Egy alprobléma kizárható, ha azon az ágon biztosan nem található jobb megoldás
- Három eset van, amikor egy ág kizárható
  - Az LP relaxáció megengedhető megoldást ad
  - Az LP relaxációnak nincs megoldása
  - A korlát rosszabb, mint az aktuális legjobb megoldás (Z^*)

Módszer – Kizárás

- Az LP relaxáció megengedhető megoldást ad
  - Ha a korlát jobb, mint az aktuális Z^*, akkor a korlát lesz az új Z^*
  - Ebben az esetben az ág kizárható, ugyanis ez egy felső korlát az ebből a pontból kiinduló összes alproblémára
- Az LP relaxációnak nincs megoldása
  - Nincs megengedhető megoldás a korlátokra
- A korlát rosszabb, mint az aktuális legjobb megoldás
  - Ha a alprobléma korlátja rosszabb, mint az aktuális legjobb megoldás
  - Ebben az esetben az ág kizárható, ugyanis ez a legjobb korlát az ehhez az ághoz tartozó alproblémáknak, így ezek megoldása vagy ezzel egyenlő, vagy még rosszabb lesz

Példa

- Nézzük a következő bináris programozási feladatot

$$\max Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$-x_2 + x_4 \leq 0$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

Kezdő lépések

- $Z^* = -\infty$ beállítása szükséges
- Az LP relaxáció megoldása, ahol a binaritási feltételek hiányoznak, helyette új feltételek alkalmazandók $(0 \leq x_j \leq 1, \forall j)$
- Az LP relaxáció optimális megoldása:

$$Z\left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right) = 16{,}5$$

- Ez lesz a felső korlát a teljes feladatra, de mivel ez egy egészértékű programozási feladat a $Z \leq 16$ lesz a végleges felső korlát

Megoldás szimplex módszerrel 1.

$$\max Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$-x_1 + x_3 \le 0$$
$$-x_2 + x_4 \le 0$$
$$0 \le x_j \le 1 \ \forall j$$

$$\max Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + s_1 = 10$$
$$x_3 + x_4 + s_2 = 1$$
$$-x_1 + x_3 + s_3 = 0$$
$$-x_2 + x_4 + s_4 = 0$$
$$x_1 + s_5 = 1$$
$$x_2 + s_6 = 1$$
$$x_3 + s_7 = 1$$
$$x_4 + s_8 = 1$$
$$x_j \ge 0 \ \forall j$$

Megoldás szimplex módszerrel 2.

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
6	3	5	2	1	0	0	0	0	0	0	0	10	1,7
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	INF
-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	INF
1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	INF
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	INF
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	INF
-9	-5	-6	-4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	3	11	2	1	0	6	0	0	0	0	0	10	0,9
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	INF
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	INF
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	INF
0	-5	-15	-4	0	0	-9	0	0	0	0	0	0	

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	0,3	1	0,2	0,1	0	0,5	0	0	0	0	0	0,9	5
0	-0,3	0	0,8	-0,1	1	-0,5	0	0	0	0	0	0,1	0,1
1	0,3	0	0,2	0,1	0	-0,5	0	0	0	0	0	0,9	5
0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-0,3	0	-0,2	-0,1	0	0,5	0	1	0	0	0	0,1	-0,5
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	INF
0	-0,3	0	-0,2	-0,1	0	-0,5	0	0	0	1	0	0,1	-0,5
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	-0,9	0	-1,3	1,4	0	-0,8	0	0	0	0	0	14	

- Az LP relaxáció szimplex módszerrel oldható meg
- A pirossal jelzett sorok valamint oszlopok a pivot elemek
- A nulla kiválasztása nem vezet közelebb a megoldáshoz

Megoldás szimplex módszerrel 3.

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	0,5	1	0	0,1	0	0,5	-0,2	0	0	0	0	0,9	2
0	0,5	0	0	-0,1	1	-0,5	-0,8	0	0	0	0	0,1	0,2
1	0,5	0	0	0,1	0	-0,5	-0,2	0	0	0	0	0,9	2
0	-1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	-0,5	0	0	-0,1	0	0,5	0,2	1	0	0	0	0,1	-0,2
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
0	-0,5	0	0	-0,1	0	-0,5	0,2	0	0	1	0	0,1	-0,2
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	1	1
0	-2,2	0	0	1,4	0	-0,8	1,3	0	0	0	0	14	

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	0	1	0	0,2	-0,8	1	0,5	0	0	0	0	0,8	0,8
0	1	0	0	-0,2	1,8	-1	-1,5	0	0	0	0	0,2	-0,2
1	0	0	0	0,2	-0,8	0	0,5	0	0	0	0	0,8	INF
0	0	0	1	-0,2	1,8	-1	-0,5	0	0	0	0	0,2	-0,2
0	0	0	0	-0,2	0,8	0	-0,5	1	0	0	0	0,2	INF
0	0	0	0	0,2	-1,8	1	1,5	0	1	0	0	0,8	0,8
0	0	0	0	-0,2	0,8	-1	-0,5	0	0	1	0	0,2	-0,2
0	0	0	0	0,2	-1,8	1	0,5	0	0	0	1	0,8	0,8
0	0	0	0	1	4	-3	-2	0	0	0	0	14	

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	0	1	0	0,2	-0,8	1	0,5	0	0	0	0	0,8	1,7
0	1	1	0	0	1	0	-1	0	0	0	0	1	-1
1	0	0	0	0,2	-0,8	0	0,5	0	0	0	0	0,8	1,7
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	INF
0	0	0	0	-0,2	0,8	0	-0,5	1	0	0	0	0,2	-0,3
0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	INF
0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	INF
0	0	3	0	1,5	1,5	0	-0,5	0	0	0	0	16,5	

x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	b	Ind.
0	0	1,5	0	0,2	-0,3	1	0	0	-0,5	0	0	0,8	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
1	0	0,5	0	0,2	-0,3	0	0	0	-0,5	0	0	0,83	
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	
0	0	-0,5	0	-0,2	0,3	0	0	1	0,5	0	0	0,2	
0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
0	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	
0	0	2,5	0	1,5	1	0	0	0	0,5	0	0	16,5	

- Az utolsó táblázat tartalmazza az optimális megoldást
- $Z\left(\frac{5}{6}, 1, 0, 1\right) = 16{,}5$

Első iteráció – Szétválasztás

- A példafeladat során a szétválasztási lépésben két alfeladatot generálunk

$$\max Z = 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$x_3 \le 0$$
$$-x_2 + x_4 \le 0$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

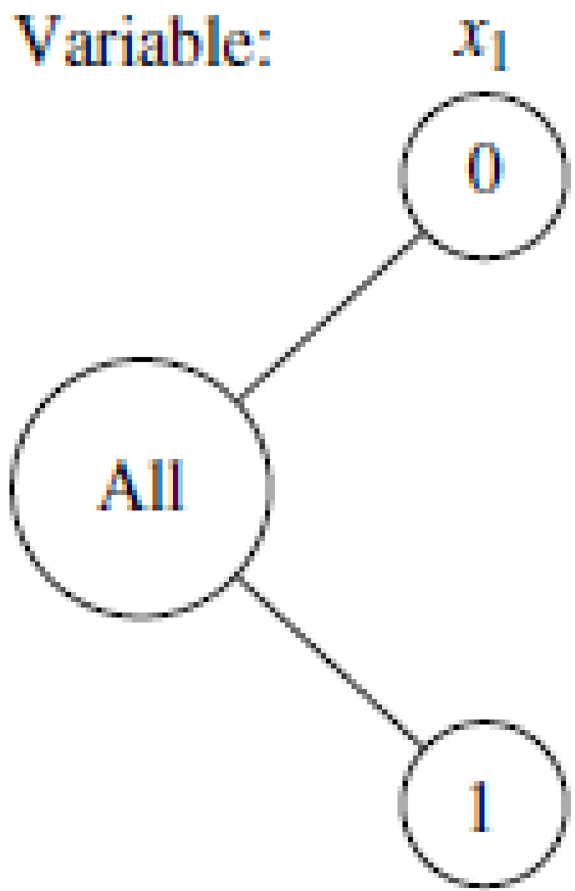
- Ha $x_1 = 0$

$$\max Z = 9 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

$$3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 4$$
$$x_3 + x_4 \le 1$$
$$x_3 \le 1$$
$$-x_2 + x_4 \le 0$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

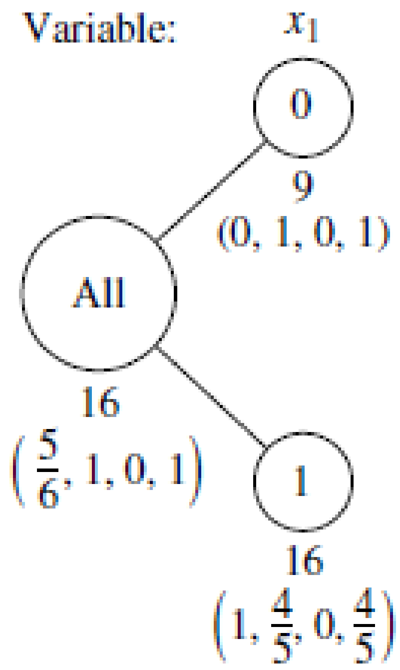
- Ha $x_1 = 1$

Első iteráció – Szétválasztás



Első iteráció – Korlátozás

- Ebben a lépésben kell megoldani az LP relaxációt
- A korlátozás hatására az első lépés után a következő fa alakul ki



Első iteráció – Kizárás

- Ha $x_1 = 0$ akkor megengedhető megoldás alakul ki
  - $Z^* = 9$ aktuális legjobb megoldást kell beállítani
  - Az ágat ki kell zárni
- Az egyetlen megengedhető ág az $x_1 = 1$

Második iteráció – Szétválasztás

- Két alproblémát generálunk

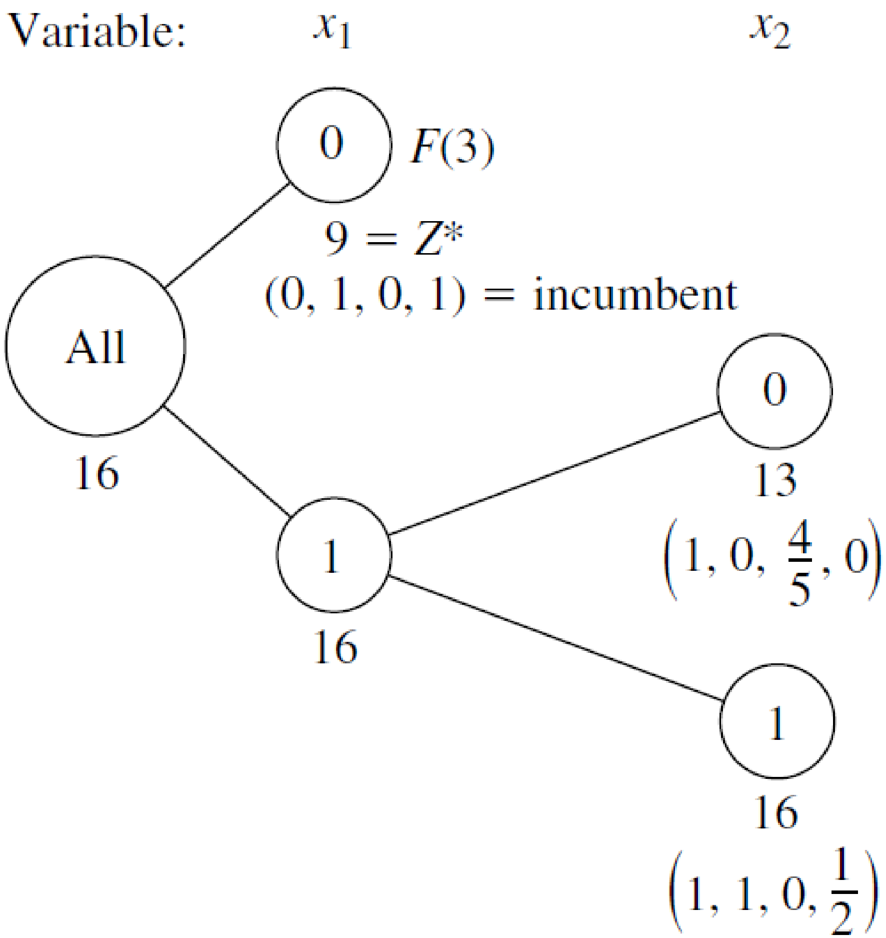
$$\max Z = 9 + 6x_3 + 4x_4$$
$$5x_3 + 2x_4 \leq 4$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_4 \leq 0$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_2 = 0$

$$\max Z = 14 + 6x_3 + 4x_4$$
$$5x_3 + 2x_4 \leq 1$$
$$x_3 + x_4 \leq 1$$
$$x_3 \leq 1$$
$$x_4 \leq 1$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_2 = 1$

Második iteráció – Korlátozás



Második iteráció – Kizárás

- Mindkét ág megengedhető
- A legjobb megengedhető ág az $x_2 = 1$ így a következőkben ezen haladunk tovább

Harmadik iteráció – Szétválasztás

- Két alproblémát generálunk

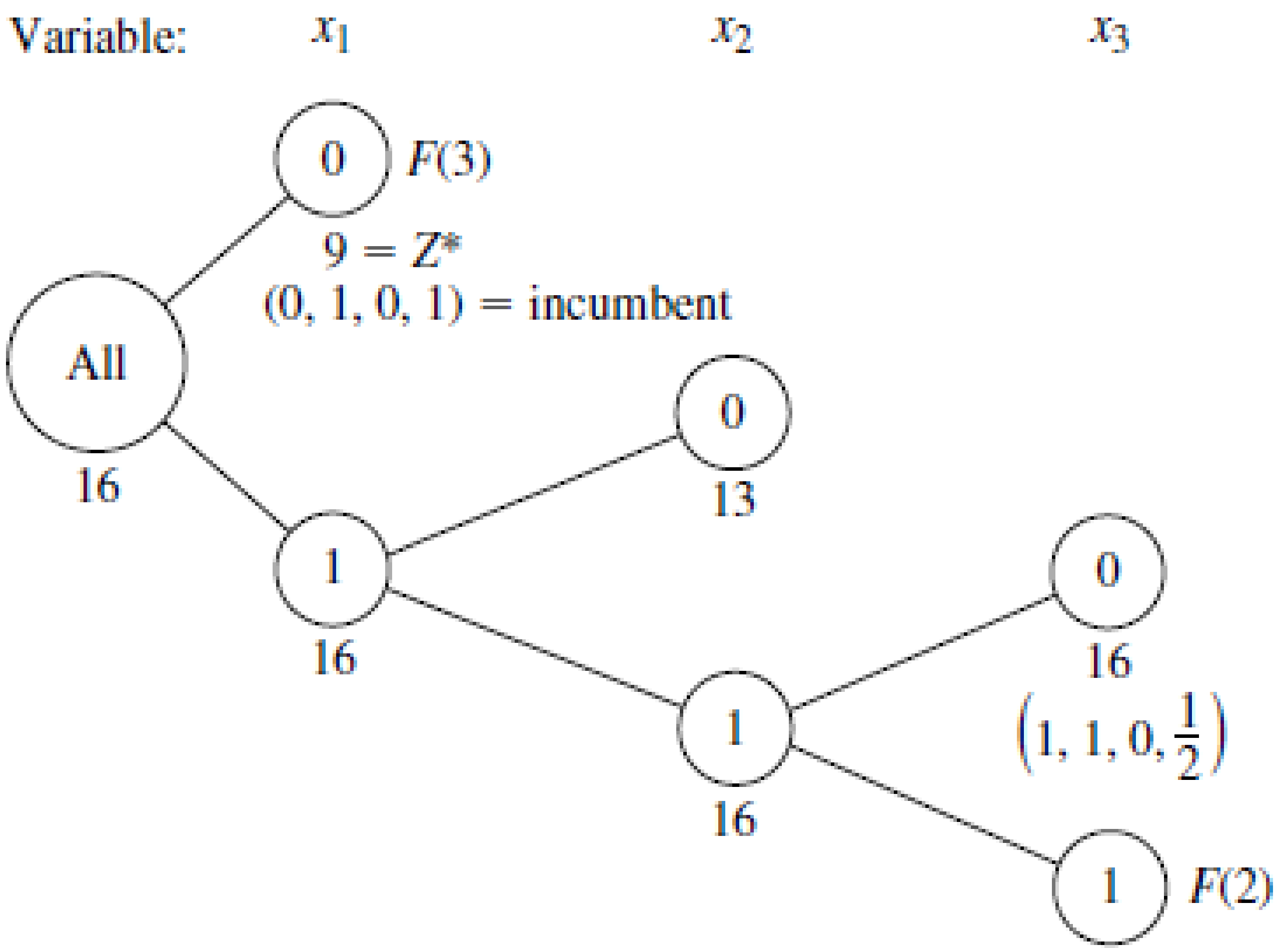
$$\max Z = 14 + 4x_4$$
$$2x_4 \leq 1$$
$$x_4 \leq 1$$
$$x_4 \leq 1$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_3 = 0$

$$\max Z = 20 + 4x_4$$
$$2x_4 \leq -4$$
$$x_4 \leq 0$$
$$x_4 \leq 1$$
$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_3 = 1$

Harmadik iteráció – Korlátozás



Harmadik iteráció – Kizárás

- Ha $x_3 = 1$ akkor nincs megengedhető megoldás
  - Ez az ág kizárható
- Az egyetlen megengedhető ág az $x_3 = 0$

Negyedik iteráció – Szétválasztás

- Két alproblémát generálunk

$$\max Z = 14$$

$$0 \leq 1$$
$$0 \leq 1$$
$$0 \leq 1$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_4 = 0$

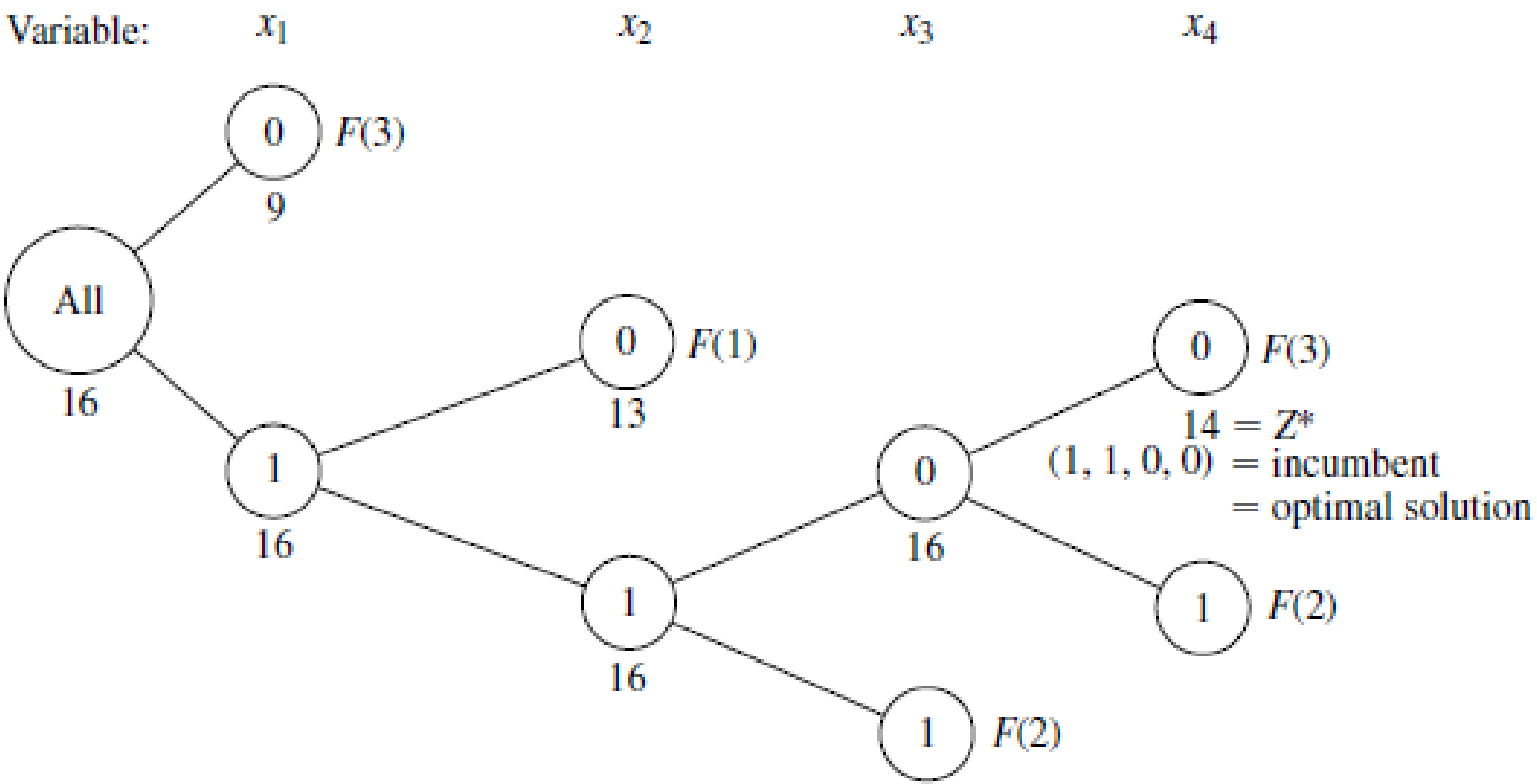
$$\max Z = 18$$

$$0 \leq -1$$
$$1 \leq 1$$
$$1 \leq 1$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \forall j$$

- Ha $x_4 = 1$

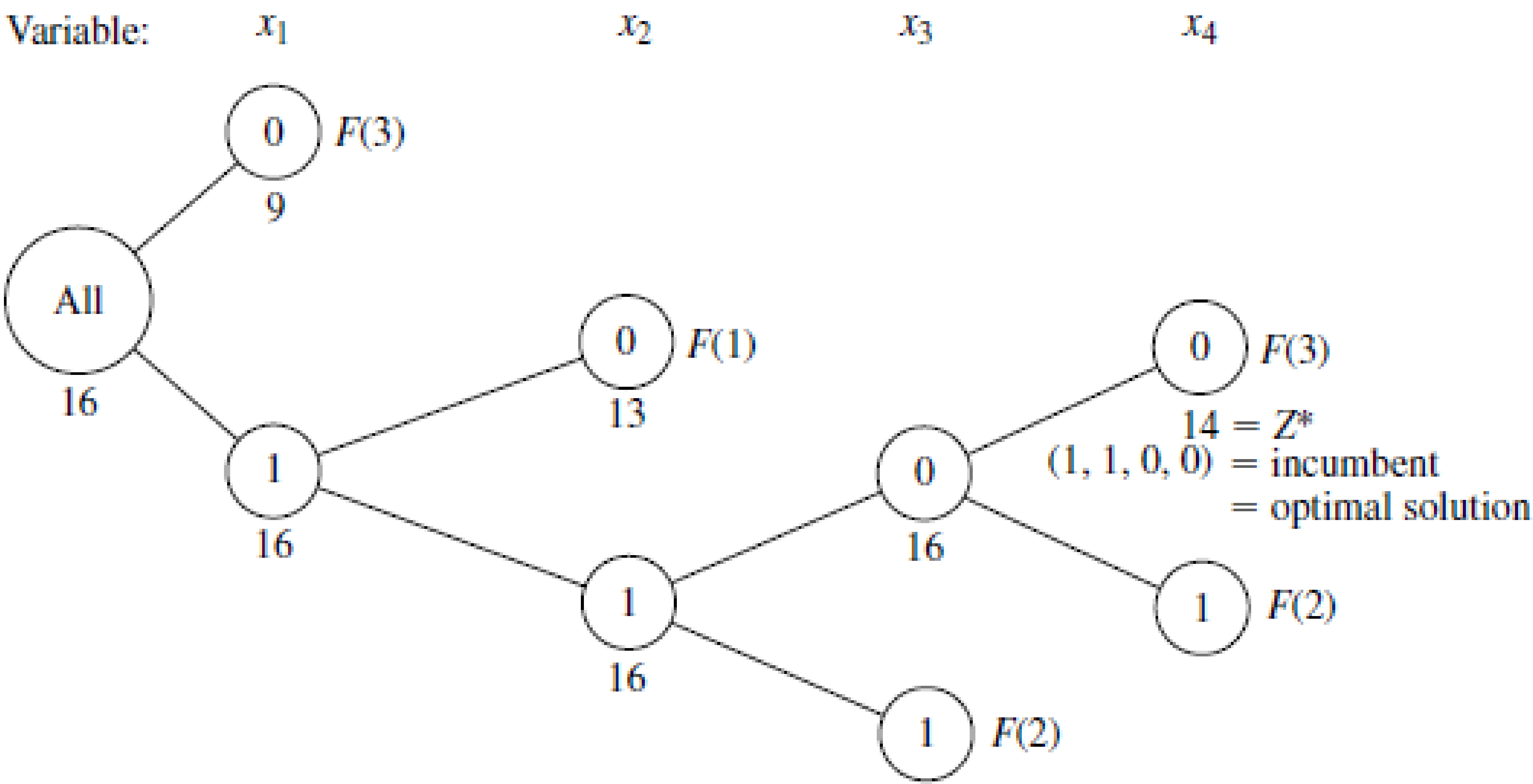
Negyedik iteráció – Korlátozás



Negyedik iteráció – Kizárás

- Ha $x_4 = 1$ akkor nincs megengedhető megoldás
  - Az ág kizárható
- Az egyetlen megengedhető ág az $x_4 = 0$ amely egy megengedhető megoldás
  - $Z^* = 14$
  - $x_2 = 0$ ág kizárható, hiszen a korlátja rosszabb, mint a $Z^* = 14$
- Mindegyik lehetséges esetet megvizsgáltuk, így a $Z^* = 14$ az optimális megoldás, amely a $Z(1, 1, 0, 0)$

Optimális megoldás



HÁTIZSÁK FELADAT

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Eredeti feladat

- Egy túrázó túrázni szeretne menni
  - Néhány lehetséges tárgyat vihet magával, ami hasznos lehet
    - Hasznosság (c_j)
    - Tömeg (a_j)
  - A hátizsákhoz tartozik egy korlát is (mennyi tárgy fér bele) (b)
  - Minden egyes eszközhöz tartozik egy döntési változó (x_j)

$$\max \sum_j c_j x_j$$

$$\sum_j a_j x_j \leq b$$

$$x_j = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \forall j$$

Együtthatók pozitivitásának hatása

- A megoldáshalmaz összefüggő
  - Adott egy bináris megoldásvektor ($\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{y} \leq b$)
  - Ha egy másik bináris vektor $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{y}$ is adott, akkor $\boldsymbol{z}$ ugyancsak megoldása a feladatnak
  - Ha $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ vektor adott, illetve $\boldsymbol{y}$ és $\boldsymbol{z}$ vektorok megoldásai a feladatnak, akkor $\boldsymbol{x}$ is egy megengedett megoldás
- Az összes lehetséges tárgyat szükséges elvinni az optimális megoldáshoz
- Ezen tulajdonságok lehetővé teszik a mohó algoritmus alkalmazását

Megoldási módszer

- A lehetséges tárgyakat a tömegre vetített egységhasznosságuk alapján sorba rendezzük
- Az összes lehetséges elemet bepakoljuk, amíg a korlátot el nem érjük (alsó korlát)
- A következő tárgy egy részét szintén a hátizsákba helyezzük, hogy kielégítsük a korlátot (felső korlát)
- A szétválasztási lépésnél a döntési változó a megosztott tárgy

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.
Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.
SZABÓ Zsombor
2019

email: szabo.zsombor@mail.bme.hu

MŰEGYETEM 1782

KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET!

Az ábrák és a példák forrása

- Hillier F. S, Lieberman G. J. Integer Programming. In: Hillier F. S, Lieberman G. J. Introduction to Operations Research. 7th ed. New York: McGrow-Hill; 2001. p. 576-653. ISBN: 0-07-232169-5