BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

MŰEGYETEM 1782

DÖNTÉSELŐKÉSZÍTŐ MÓDSZEREK A KÖZLEKEDÉSBEN

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.
Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.
SZABÓ Zsombor
2019

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

HÁLÓZATOPTIMALIZÁLÁSI MODELLEK

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Gráfelmélet

- Hálózat: csúcsok és élek összessége
- Csúcs: az élek találkozási pontjai
- Él: a csúcsokat élek kötik össze
- A közlekedéstudományokban a gráfokon általában valamilyen forgalom szokott lebonyolódni
- Irányított él: az adott élen a forgalom csak az egyik irányban lehetséges
- Irányított hálózat: a hálózaton belül az összes él irányított

Gráfelmélet

- Útvonal: két adott pont közötti élek halmaza, amelyen el lehet jutni egyik pontból a másikra
- Irányítatlan út: az útvonalban az összes él irányítatlan
- Kör: olyan útvonal amelynek a kezdő és végpontja azonos
- Összekötött csúcsok: létezik irányítatlan, vagy két ellentétes irányú útvonal két pont között
- Összekötött hálózat: minden egyes csúcspár összekötött csúcs
- Fa: olyan összekötött hálózat, amelyben nincs kör
- Feszítőfa: az összes csúcs eleme a fának

LEGRÖVIDEBB ÚT KERESÉS – DIJKSTRA MÓDSZER

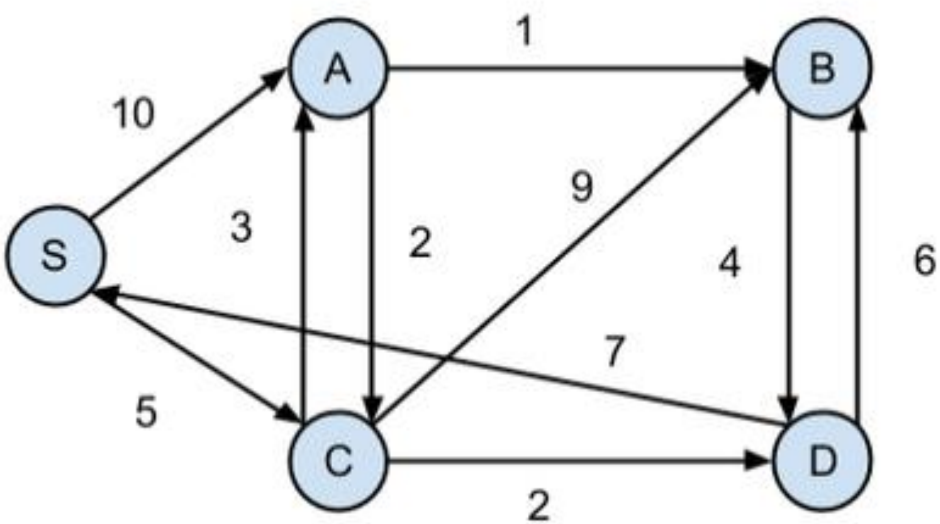
MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Dijkstra módszer

- Cél: a minimális feszítőfa megtalálása egy adott pontból, ahonnan a hálózat többi pontjának távolsága számítandó
- Tétel: egy n csúcsú feszítőfának mindig pontosan $n-1$ éle van
- Bármely ilyen hálózat leírható mind táblázatos, mind pedig gráf formában

Dijkstra módszer



	A	B	C	D	S
A	M	1	2	M	M
B	M	M	M	4	M
C	3	9	M	2	M
D	M	6	M	M	7
S	10	M	5	M	M

Dijkstra módszer

- A felvett táblázatnak három része van
  - Az első oszlop tartalmazza a már kiválasztott csúcsokat
  - A második rész ($n - 1$ oszlop) tartalmazza az aktuális legrövidebb utakat a kiindulási ponttól
  - A harmadik rész, szintén $n - 1$ oszlop, tartalmazza a célpont előtti közvetlen csúcsot
- A módszer során csúcsról csúcsra haladva közelítjük a megoldást
- Ha a figyelembe vett új útvonal rövidebb egy pontba, mint az aktuálisan Legrövidebb, akkor az új útvonalat kell figyelembe venni a táblázat módosításával
- A módszer mindig $n - 1$ lépésből áll

	A	B	D	S	A	B	D	S
C	3	9	2		C	C	C	
CD	3	8	2	9	C	D	C	D
CDA	3	4	2	9	C	A	C	D
CDAB	3	4	2	9	C	A	C	D

Dijkstra módszer

- Általánosságban minden egyes iterációnak két lépése van:
  - Vizsgáljuk az összes csúcsot amelyet a legutóbb kiválasztott csúcson keresztül el lehet érni, majd határozzuk meg az oda vezető út hosszát
  - Ha az útvonal hossza rövidebb, mint a már meghatározott, akkor a továbbiakban ezzel kell számolni (a táblázatot frissíteni kell)

Dijkstra módszer

	A	B	D	S	A	B	D	S
C	3	9	2		C	C	C	

Dijkstra módszer

	A	B	D	S	A	B	D	S
C	3	9	2		C	C	C	
CD	3	8	2	9	C	D	C	D

Dijkstra módszer

	A	B	D	S	A	B	D	S
C	3	9	2		C	C	C	
CD	3	8	2	9	C	D	C	D
CDA	3	4	2	9	C	A	C	D

Dijkstra módszer

	A	B	D	S	A	B	D	S
C	3	9	2		C	C	C	
CD	3	8	2	9	C	D	C	D
CDA	3	4	2	9	C	A	C	D
CDAB	3	4	2	9	C	A	C	D

MAXIMÁLIS FOLYAM MEGHATÁROZÁSA

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Maximális folyam meghatározása

- Adott egy hálózat
- Forrás: a hálózat folyamainak kiindulási pontja
- Nyelő: a hálózat folyamainak célpontja
- Feladat: a lehető legnagyobb folyam átengedése a hálózaton

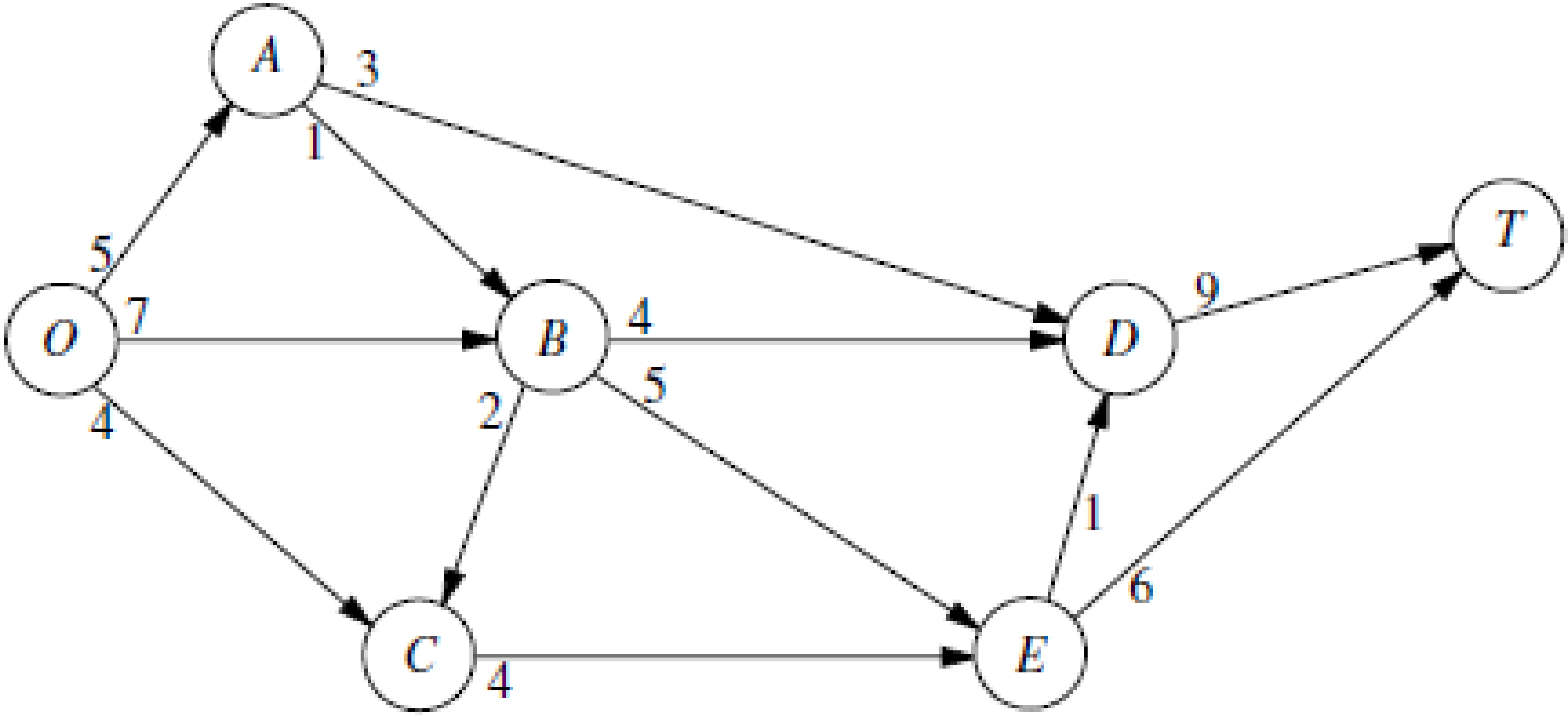
Ford-Fulkerson módszer

- n csúcs
- A csúcsok között irányított vagy irányítatlan élek
- Minden egyes élnek van egy kezdő- (i), és egy végpontja (j), ahol $i, j \in [1..n]$
- Minden egyes élnek van kapacitása (u_{ij}), és egy rajta folyó forgalom (x_{ij})

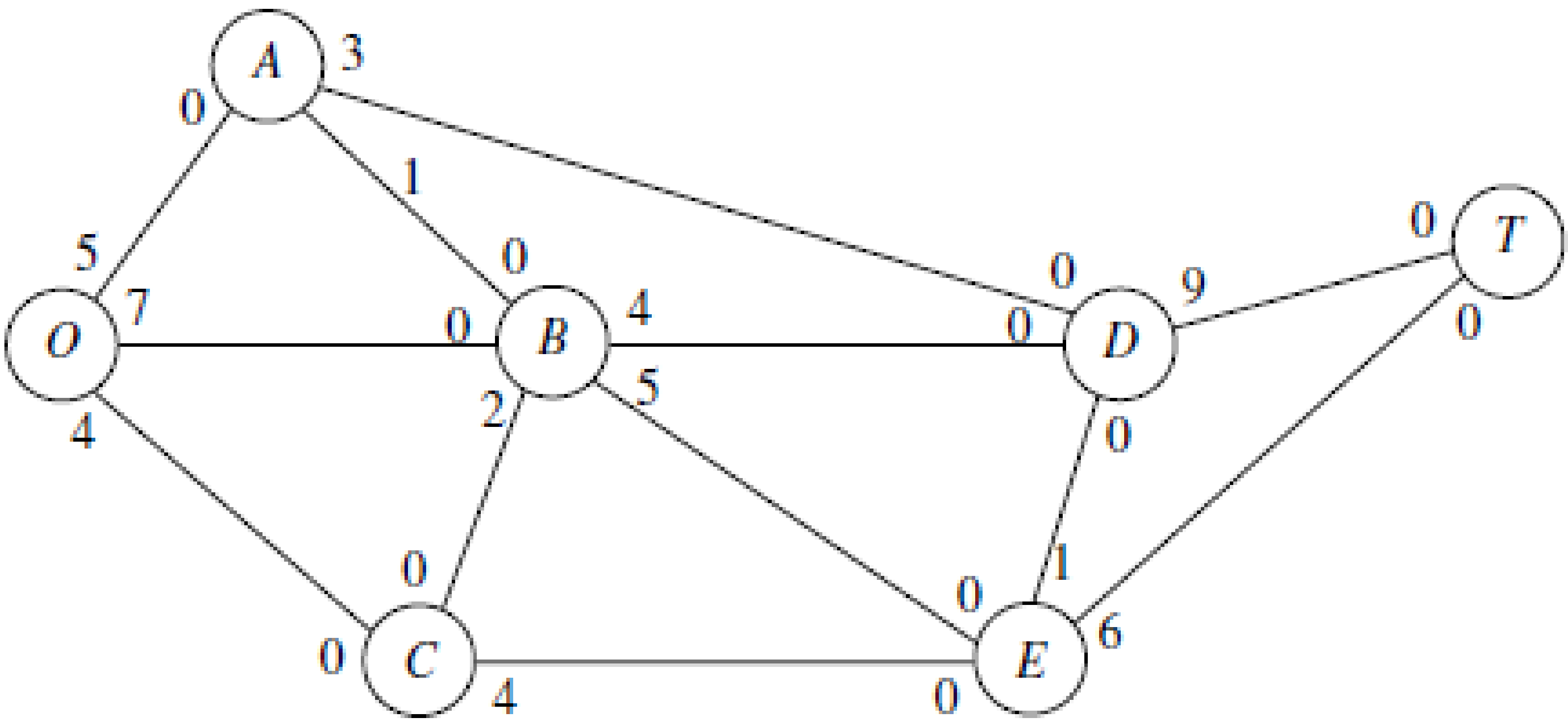
Ford-Fulkerson módszer

- A Ford-Fulkerson módszernek két fő lépése van
  - Egy megengedhető út keresése
    - Megengedhető út: olyan élek halmaza, ahol a maradék kapacitás $(u_{ij} - x_{ij})$ nagyobb, mint 0
  - Ha azonosítottunk egy megengedhető utat, akkor a legkisebb maradék kapacitással megegyező forgalmat kell ráterhelni
- Példafeladat:
  - Adott a hálózat O forrással és T nyelővel
  - Minden egyes élnek van egy iránya és egy kapacitása

Ford-Fulkerson módszer



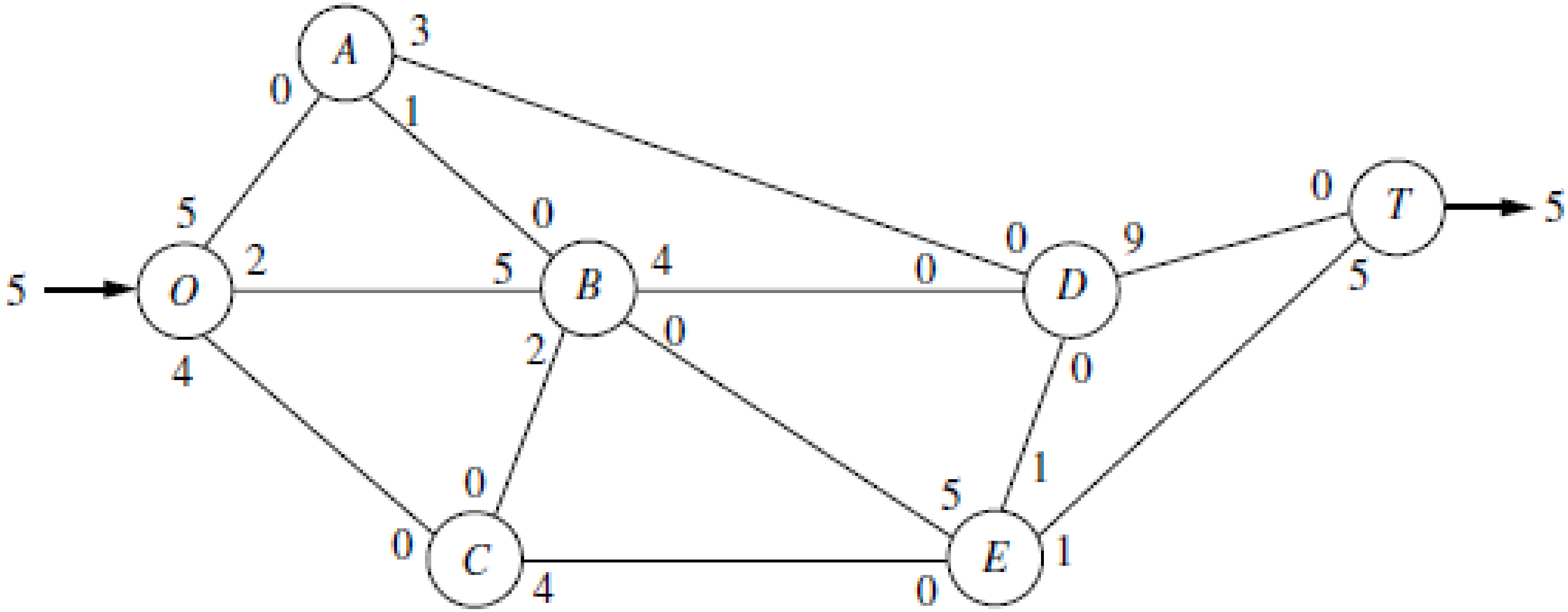
Ford-Fulkerson módszer



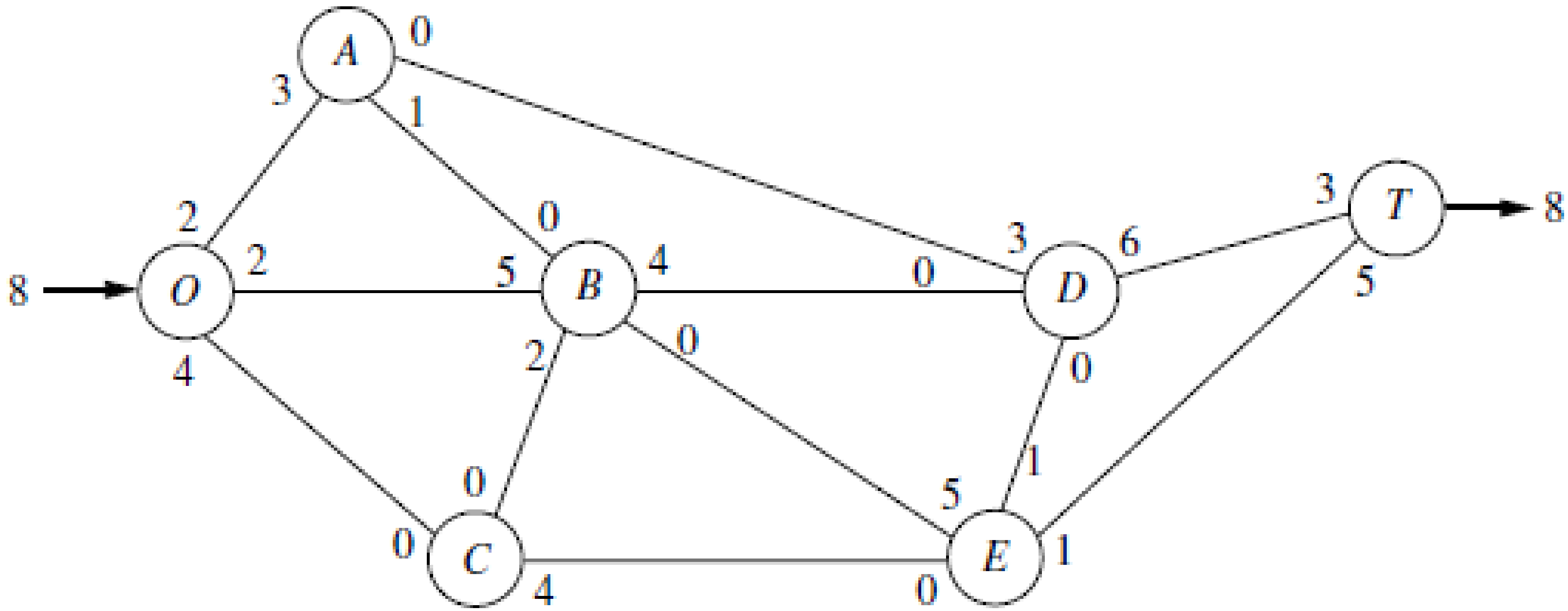
Ford-Fulkerson módszer

- Minden egyes élhez két értéket rendelünk
- Az első érték mindig a maradék kapacitást, míg a második a forgalmat mutatja
- Például, vegyük figyelembe az $O \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow T$ megengedhető utat
  - A legkisebb maradék kapacitás 5 (a BE élen) tehát ekkora forgalmat terhelhetünk a hálózatra
  - A ráterhelt forgalom értékét le kell vonni az első számból, és hozzá kell adni a második számhoz

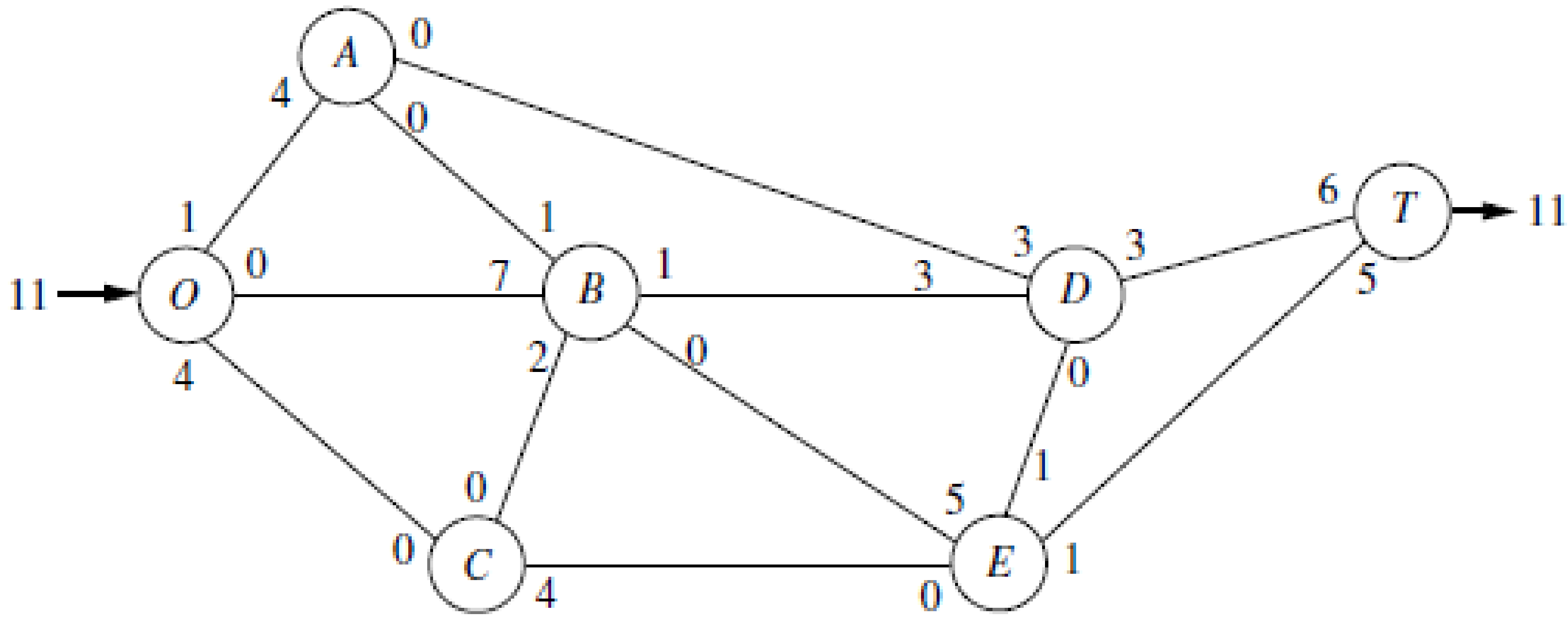
Ford-Fulkerson módszer: $O \to B \to E \to T$



Ford-Fulkerson módszer: $O \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow T$

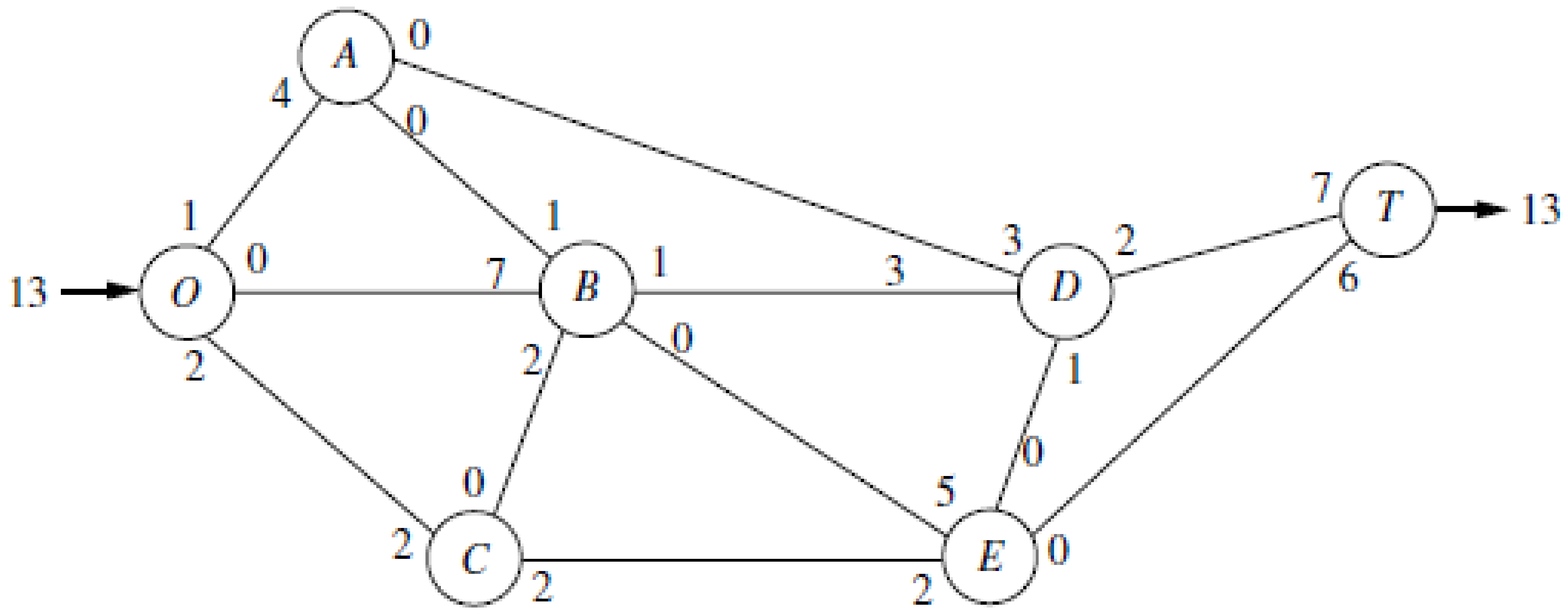


Ford-Fulkerson módszer: $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$
$O \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$



Ford-Fulkerson módszer: $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$

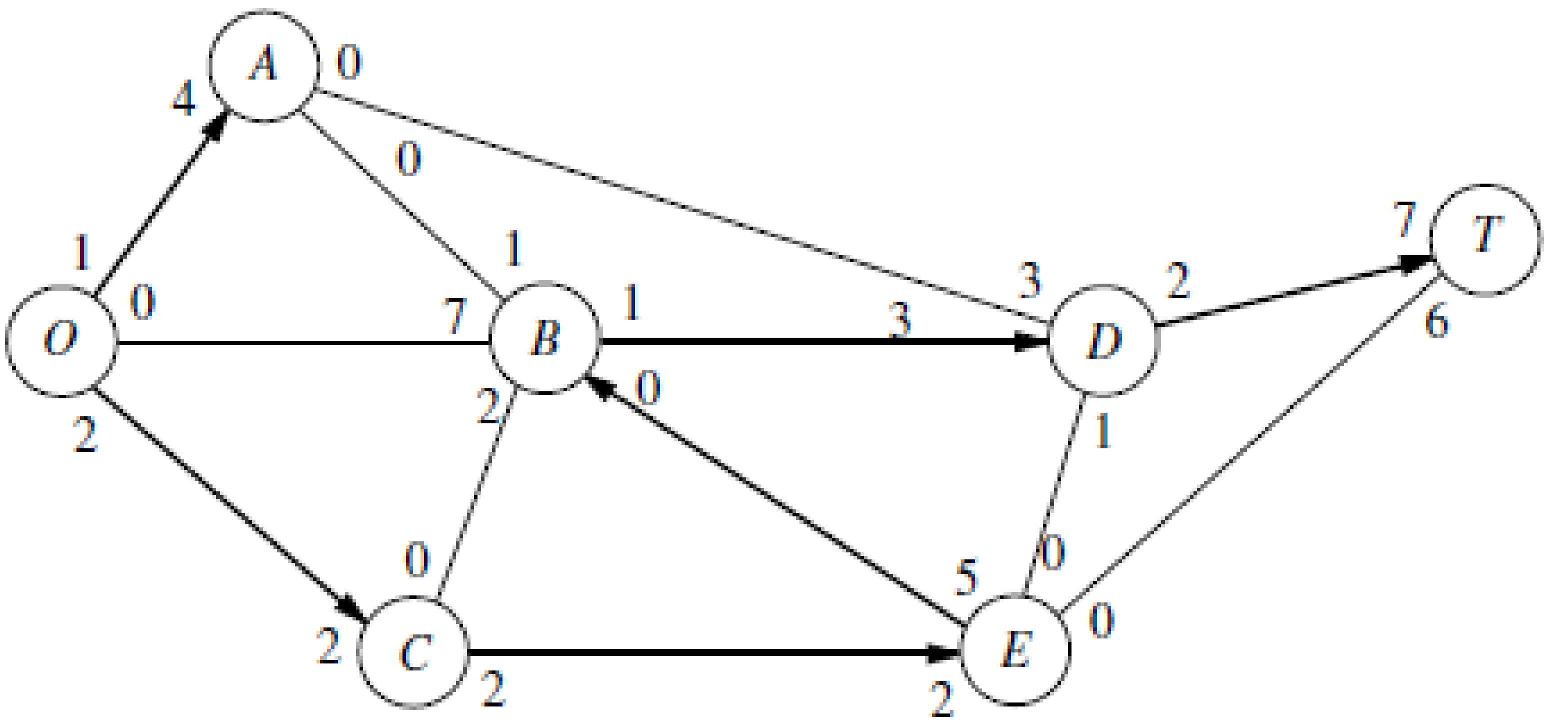
$O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow T$



Ford-Fulkerson módszer

- Fontos kérdés, hogy hogyan lehet a hálózaton egy megengedhető útvonalat találni
- A módszer a következő:
  - Kiindulunk a forrásból
  - Megvizsgáljuk azokat az éleket ahol van még maradék kapacitásunk (a csúcshoz közelebbi érték nem 0)
  - Az így elért csúcsokból vizsgáljuk az onnan elérhető éleket, amíg el nem érünk a nyelőig

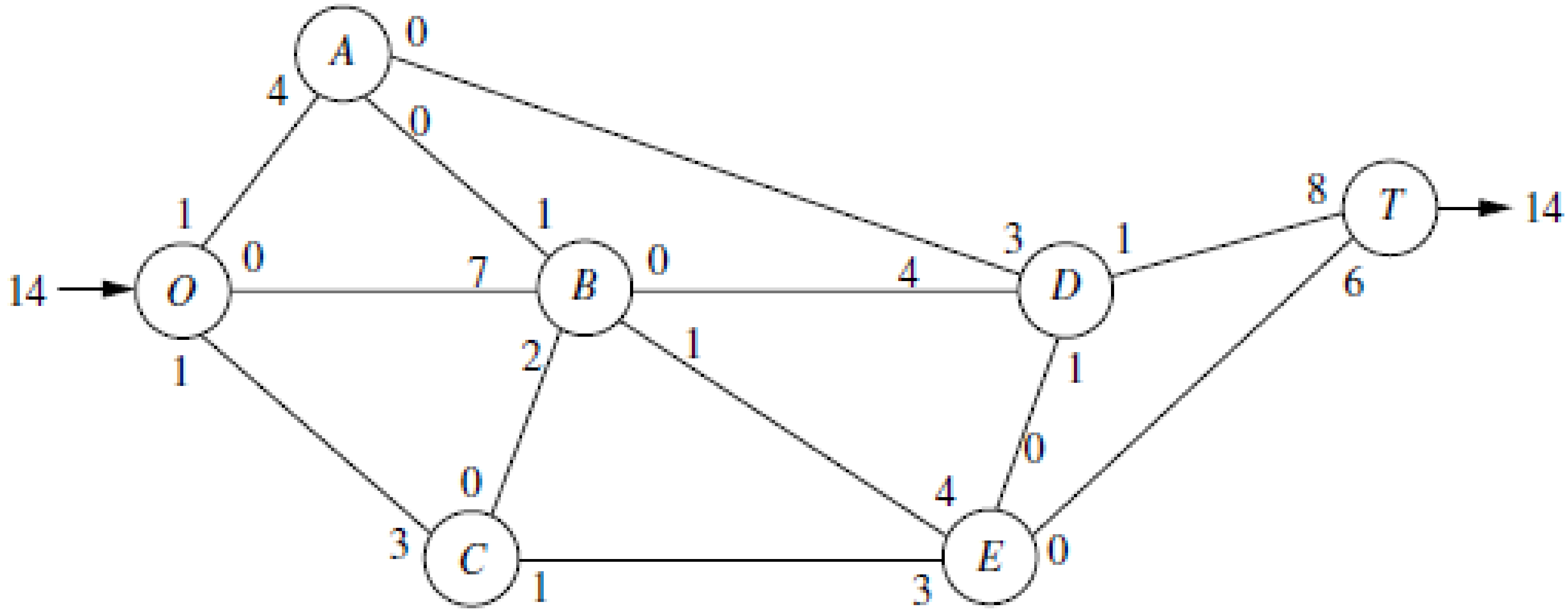
Ford-Fulkerson módszer



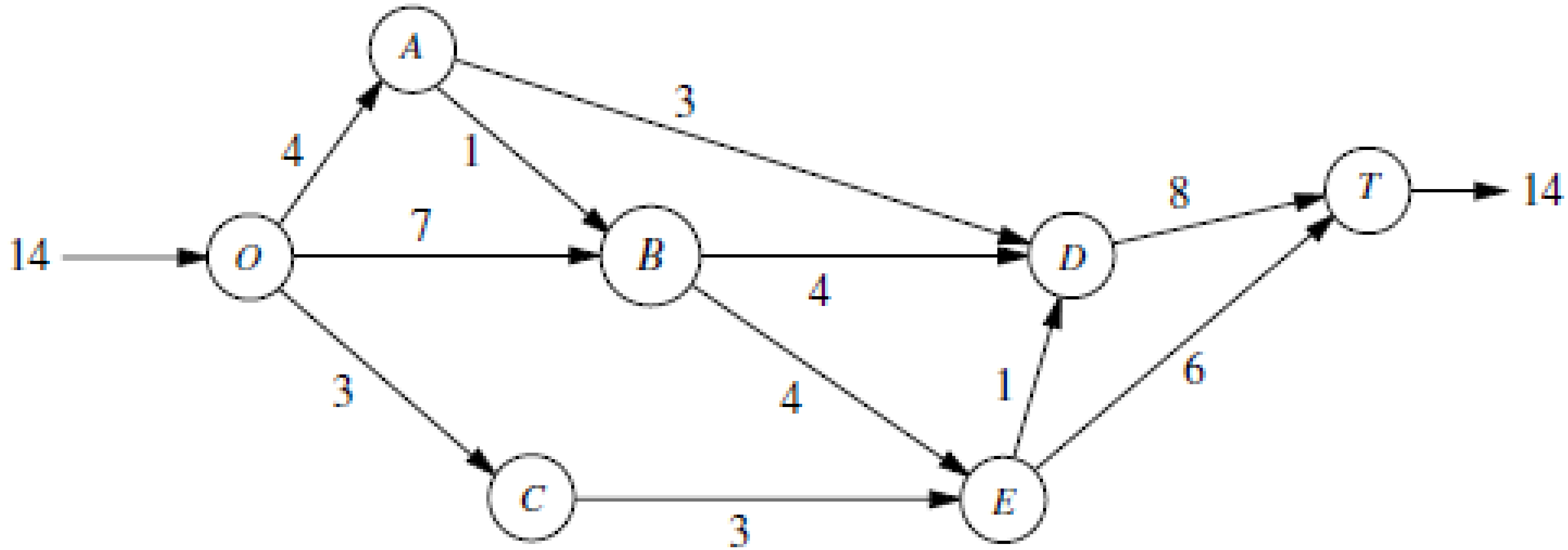
Ford-Fulkerson módszer

- Figyeljük meg, hogy eredetileg a BE él iránya fordított volt
- Ebben az esetben néhány egység forgalmat elveszünk az adott élről, és más élekre programozzuk át
- $O \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow T$ útvonal egy megengedhető út

Ford-Fulkerson módszer



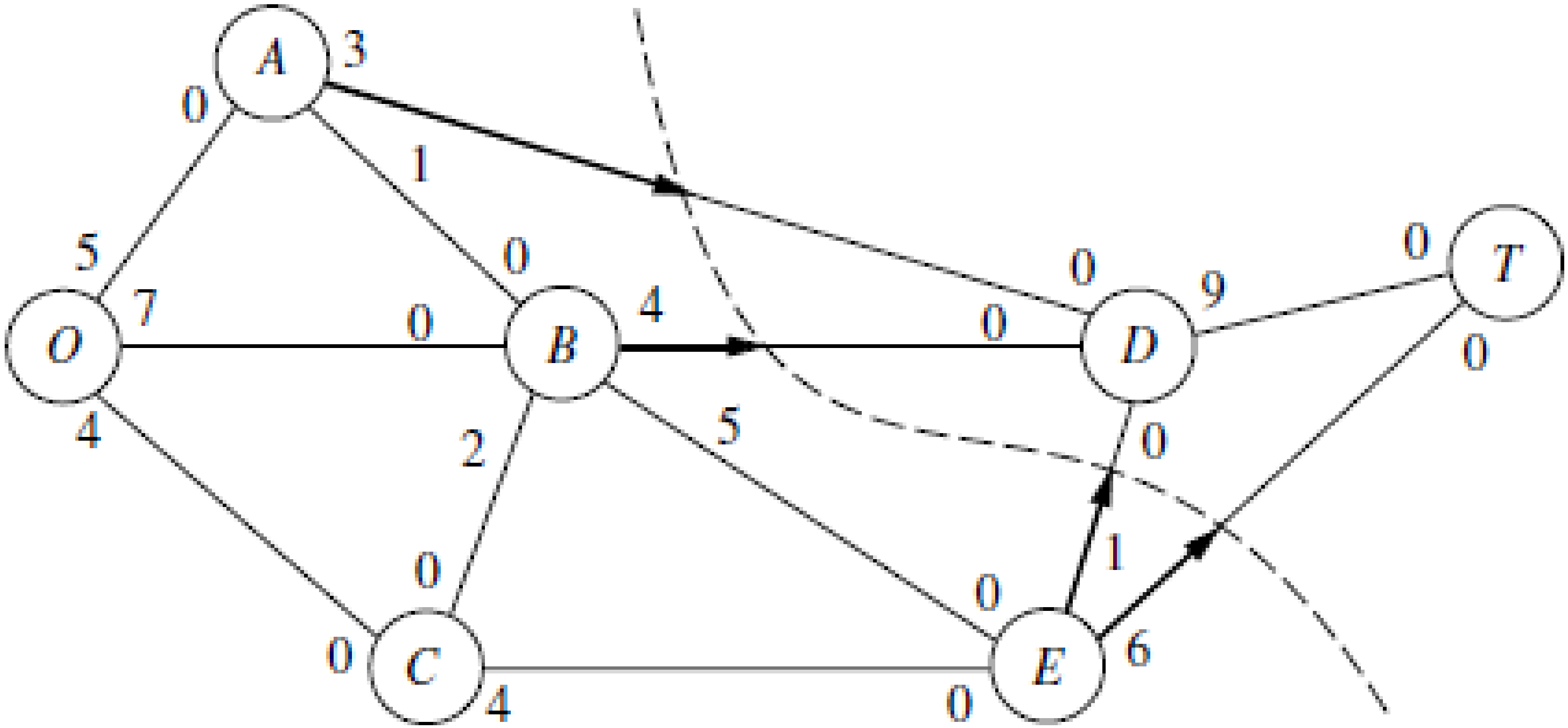
Ford-Fulkerson módszer



Ford-Fulkerson módszer – Optimalitásvizsgálat

- Megengedhető út azonosítása a komplex hálózatokon igen nehéz lehet
- Optimalitásvizsgálat: maximális folyam – minimális vágás tétele
- Vágás: Irányított élek halmaza, amely minden egyes forrás és nyelő közti útvonalból legalább egy élt tartalmaz
- Vágási érték: A vágásban szereplő élek irányhelyes kapacitásának összege
- **Tétel:** maximális folyam – minimális vágás: bármely egy forrás-nyelő párral rendelkező hálózat esetén a maximális áteresztőképesség a forrás és a nyelő között megegyezik a minimális vágási értékkel

Ford-Fulkerson módszer – Optimalitásvizsgálat



LEGKISEBB KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK

MŰEGYETEM 1782

Legkisebb költségű folyamok

- A legkisebb költségű folyamok problémaköre központi szerepet tölt be a hálózatoptimalizálási modellek között
  – Egyrészt számos gyakorlati probléma modellezhető
  – Másrészt a megoldási metódusa egyszerű
- **Az összes korábban bemutatott feladat egy-egy speciális esete a legkisebb költségű folyamoknak**

Legkisebb költségű folyamok

- Két mátrix
  - $\boldsymbol{X}$: a folyamokat tartalmazza, i és j csúcsok között a folyam nagysága x_{ij}
  - $\boldsymbol{C}$: az egységnyi költségeket tartalmazza, i és j csúcsok között a költség nagysága c_{ij}
- Minden egyes élnek van egy kapacitása (u_{ij}) amely a rajta maximálisan megengedhető folyamot mutatja
- Minden egyes csúcshoz (i) tartozik egy forgalmi igény (b_i), amely a hálózaton realizálódó folyamokat generálja
  - Ha $b_i > 0$, akkor a csúcson kínálat jelentkezik (forrás)
  - Ha $b_i < 0$, akkor a csúcshoz kereslet tartozik (nyelő)

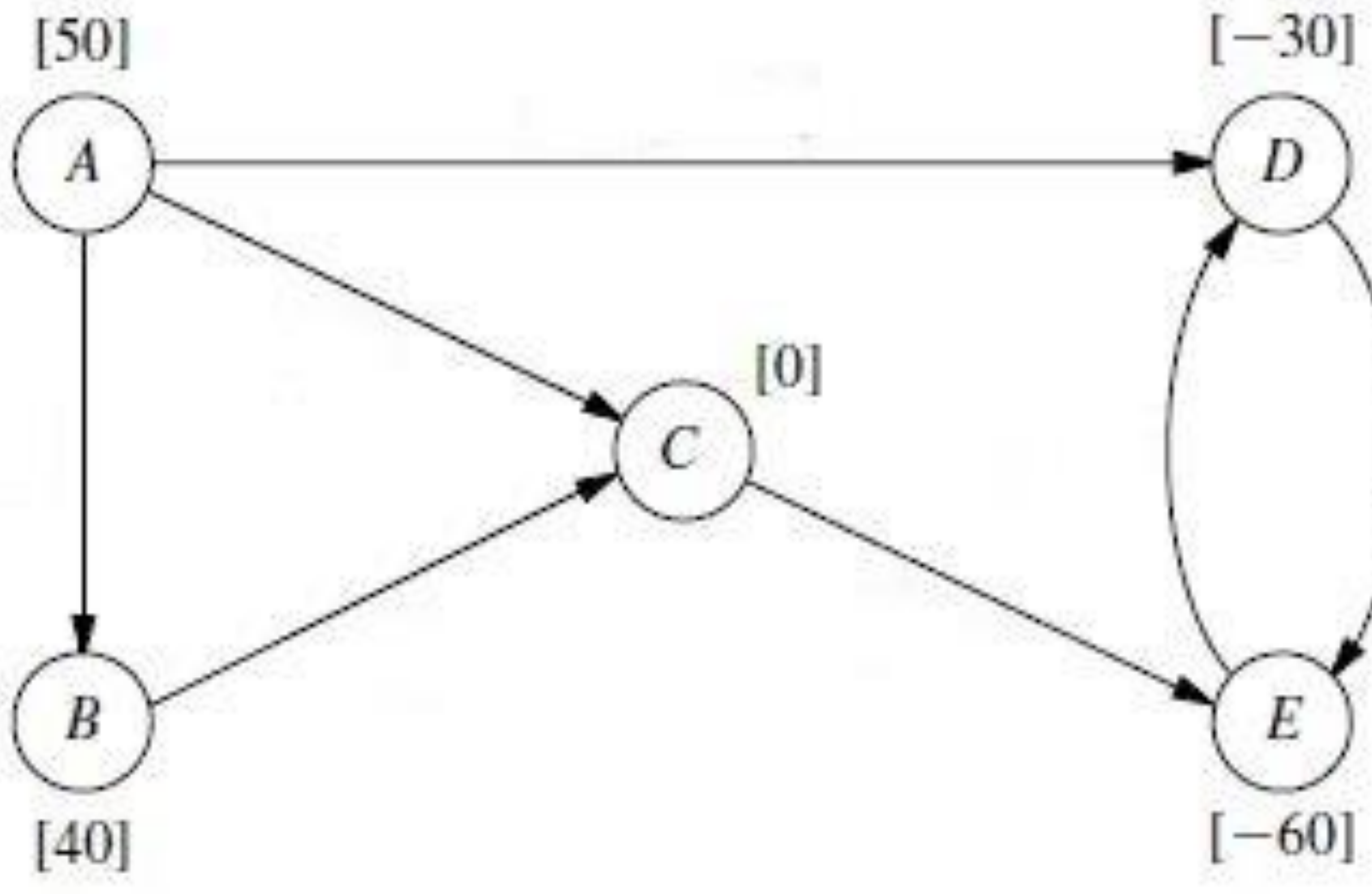
Legkisebb költségű folyamok

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i \ \forall i$$

$0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ bármely élre

Hálózati szimplex



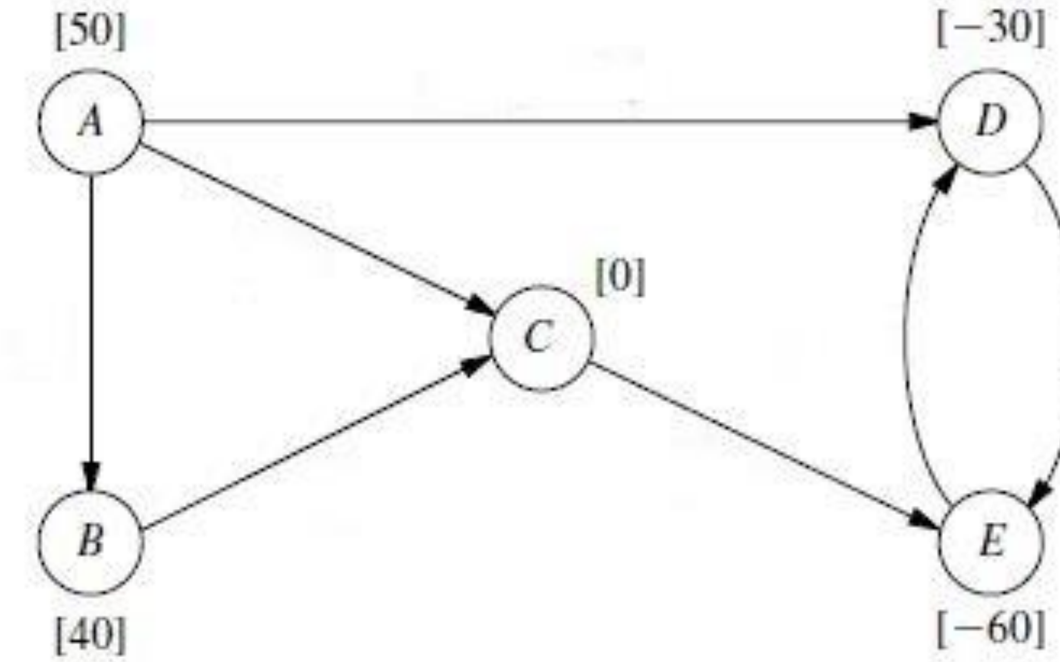
HOGYAN LEHET A KÜLÖNBÖZŐ FELADATOKAT LEGKISEBB KÖLTSÉGŰ FOLYAMKÉNT MEGOLDANI?

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

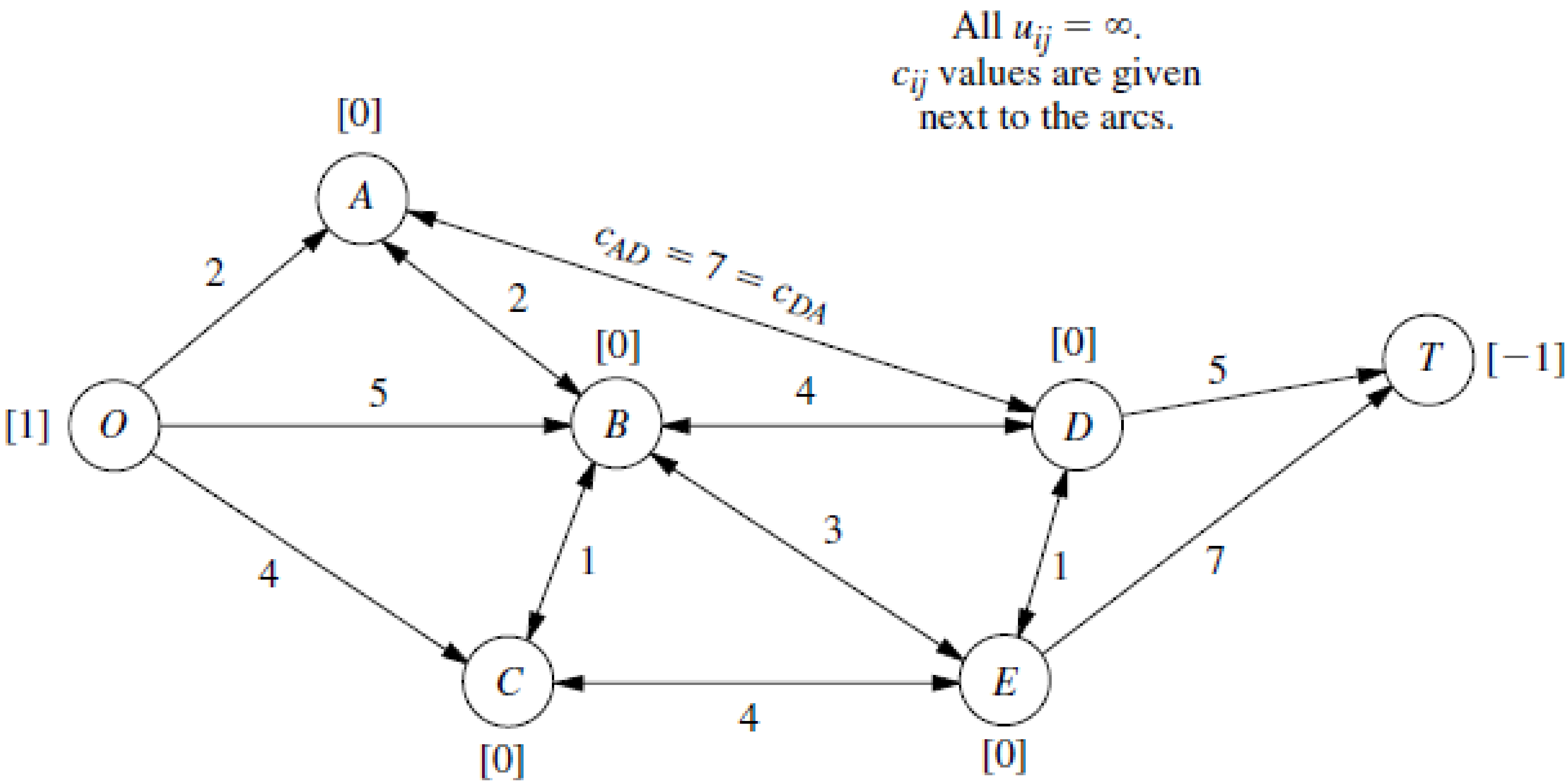
Szállítási feladat

- **Tétel:** Bármely legkisebb költségű folyam feladatnak (véges kapacitással, vagy nemnegatív költségű élekkel) létezik egy ekvivalens szállítási feladat reprezentációja

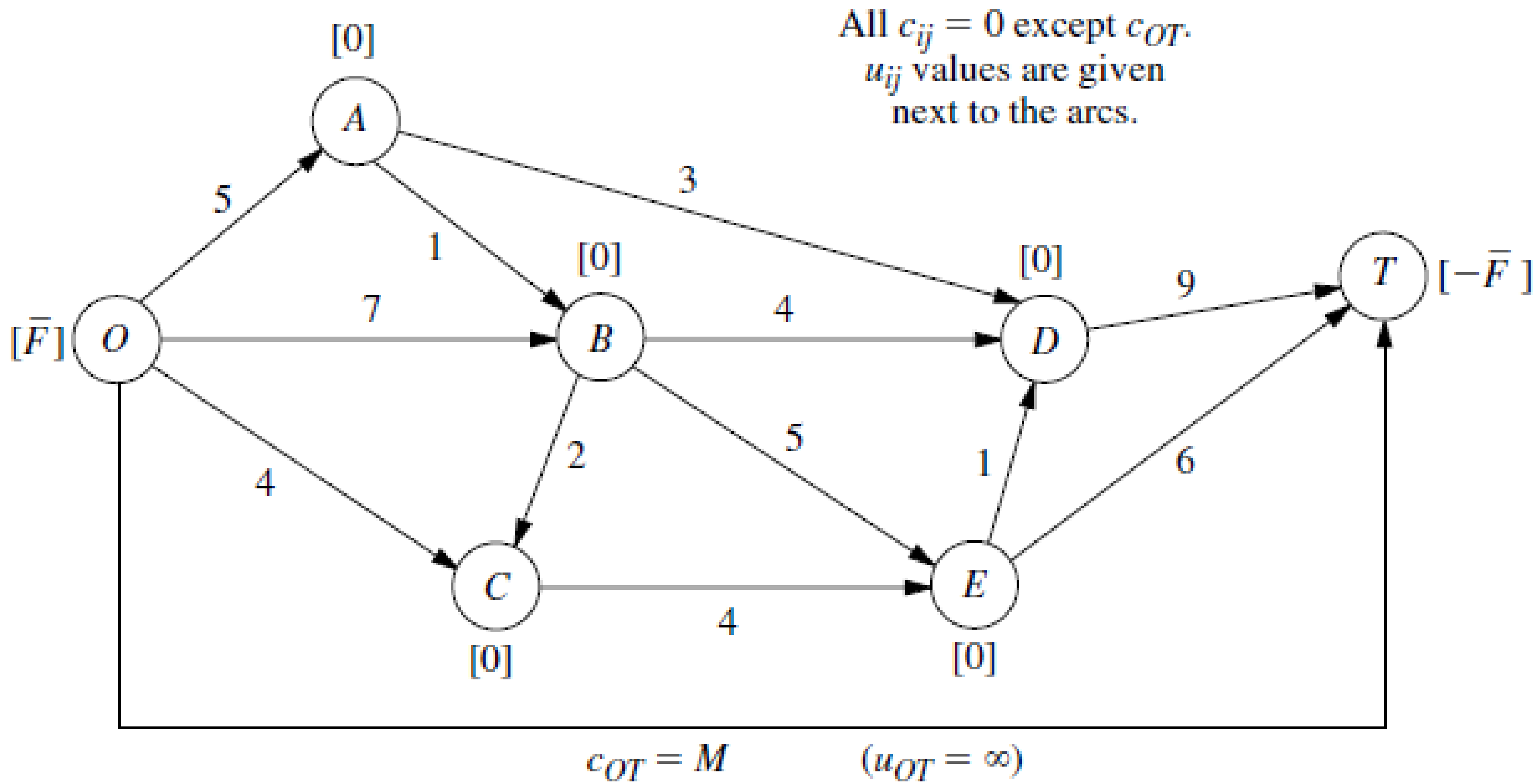


	D	E	
A			50
B			40
	30	60	

Legrövidebb út



Legnagyobb áteresztőképesség



LEGKISEBB KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK – HÁLÓZATI SZIMPLEX

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Hálózati szimplex módszer

- Minden iterációnak két fő lépése van
  - Az elhagyandó él kiválasztása
  - A következő megengedhető megoldás kiválasztása
- Bármely megengedhető megoldás egyben feszítőfa-megoldás is
- Megengedhető feszítőfa: olyan feszítőfa amelyre ráterhelve a csúcsok által generált folyamokat kielégíti a további kritériumokat ($0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}$ vagy $0 \leq y_{ij} \leq u_{ij}$)
- **Tétel:** a hálózati szimplex módszer alaptétele: bármely megoldás egyben feszítőfa-megoldás is (és fordítva) és a megengedhető megoldások is megengedhető feszítőfák (és fordítva)

Hálózati szimplex módszer

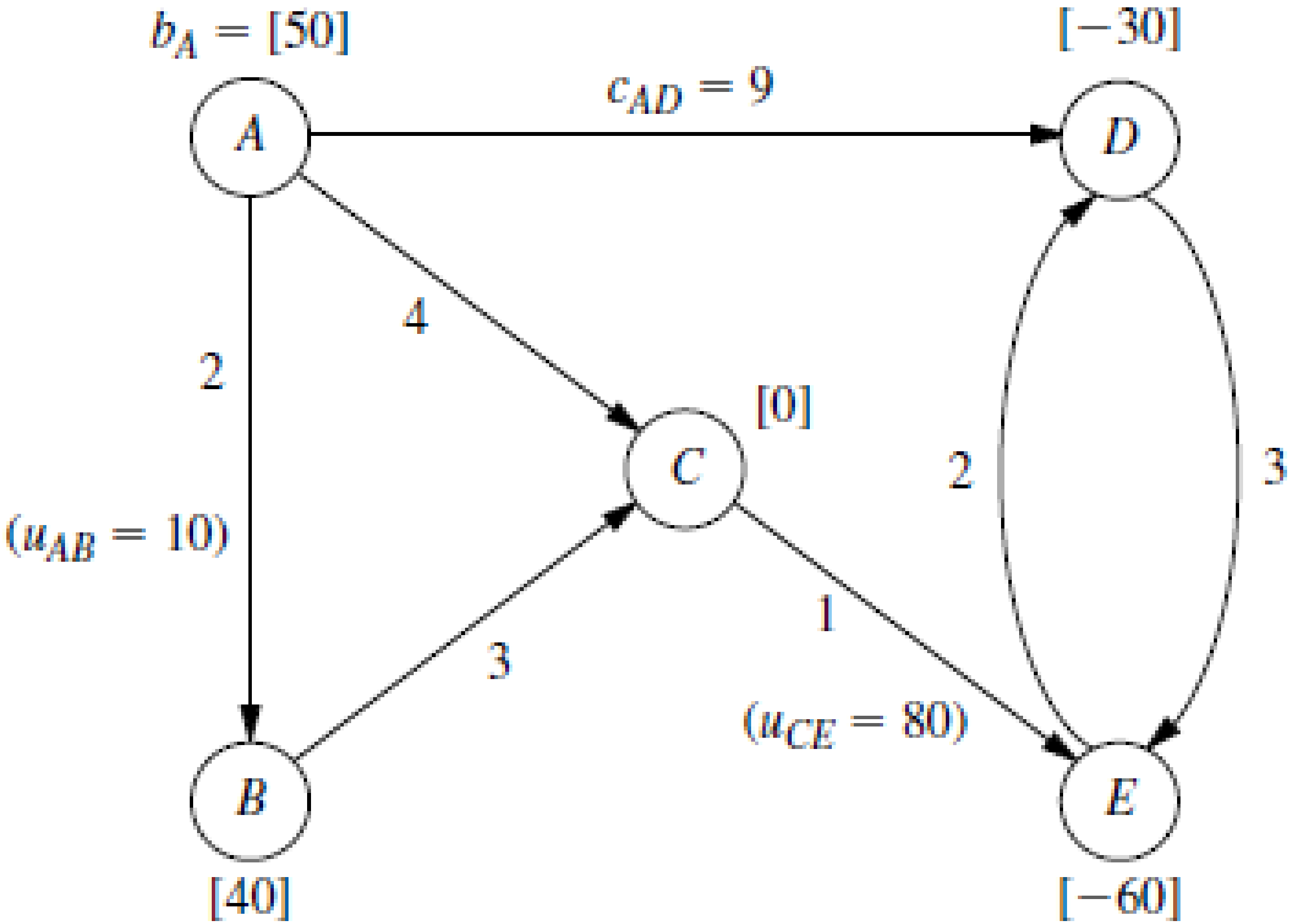
- Példahálózat
- Két élnek van felső korlátja
  - $u_{AB} = 10$
  - $u_{CE} = 80$
- Az élekhez tartozó költségeket a mátrix tartalmazza

c_{ij}	A	B	C	D	E
A		2	4	9	
B			3		
C					1
D					3
E				2	

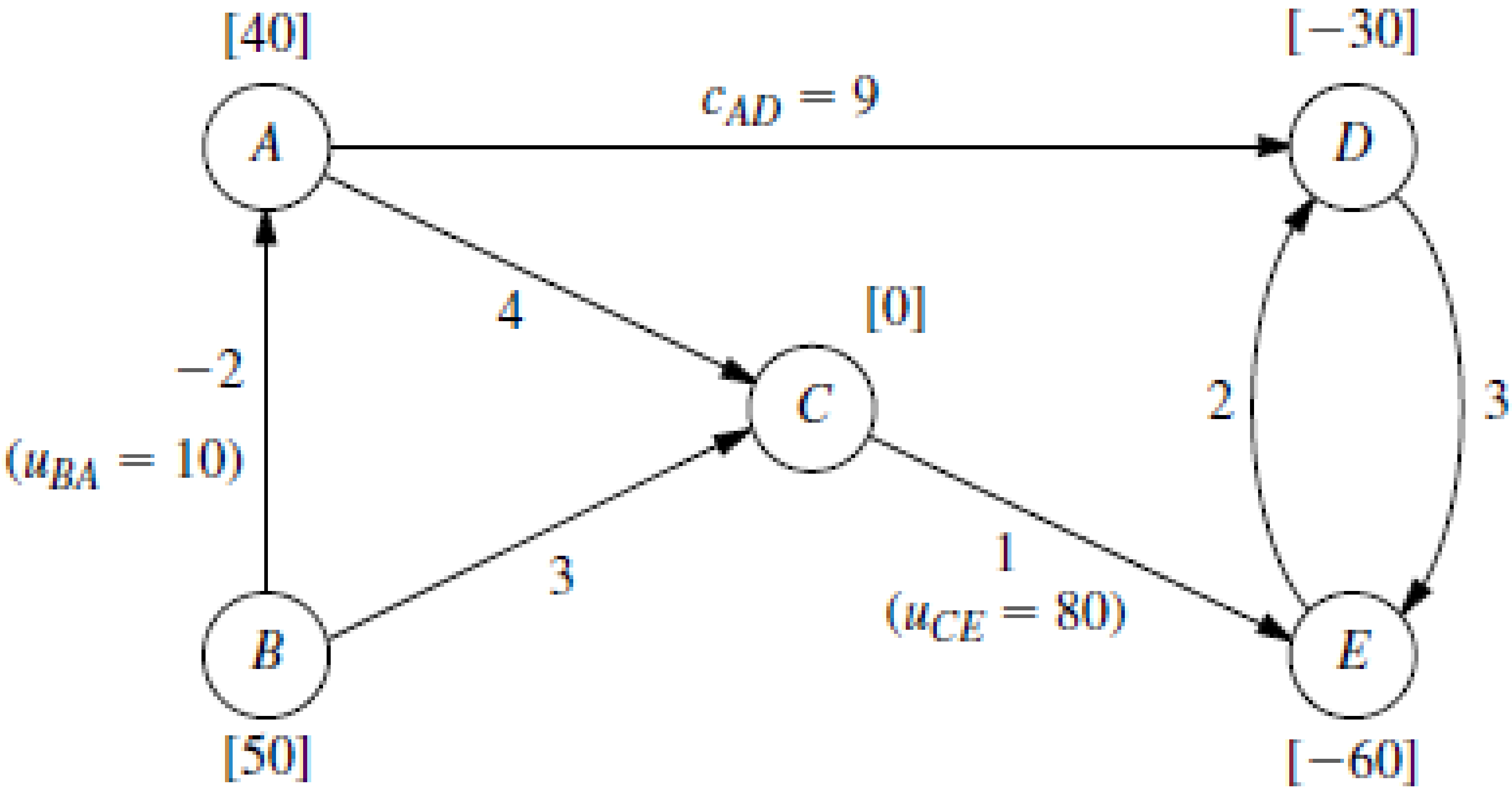
Felső korlát technika

- Ha egy élen elérjük a felső korlátot, speciális eljárás alkalmazására van szükség
- Annak érdekében, hogy megértsük ezen lépést programozzunk 10 egységnyi forgalmat az AB élre
- Az AB él irányát meg kell fordítani
- $c_{BA} = -2$ (az új él költsége az eredeti -1-szeresese lesz)
- Az A és a B csúcs igényeit 10 egységgel kell csökkenteni, illetve növelni
- A megfordított élet ekképpen kell kezelni a jövőben, szóval a forgalmat rajta ezután y_{BA} fogja jelölni
- Ha valamekkora forgalmat kell programozni az élre a jövőben, az azt fogja jelenteni, hogy ennyivel csökkentjük az élen lévő forgalmat a felső korláthoz képest

Felső korlát technika



Felső korlát technika

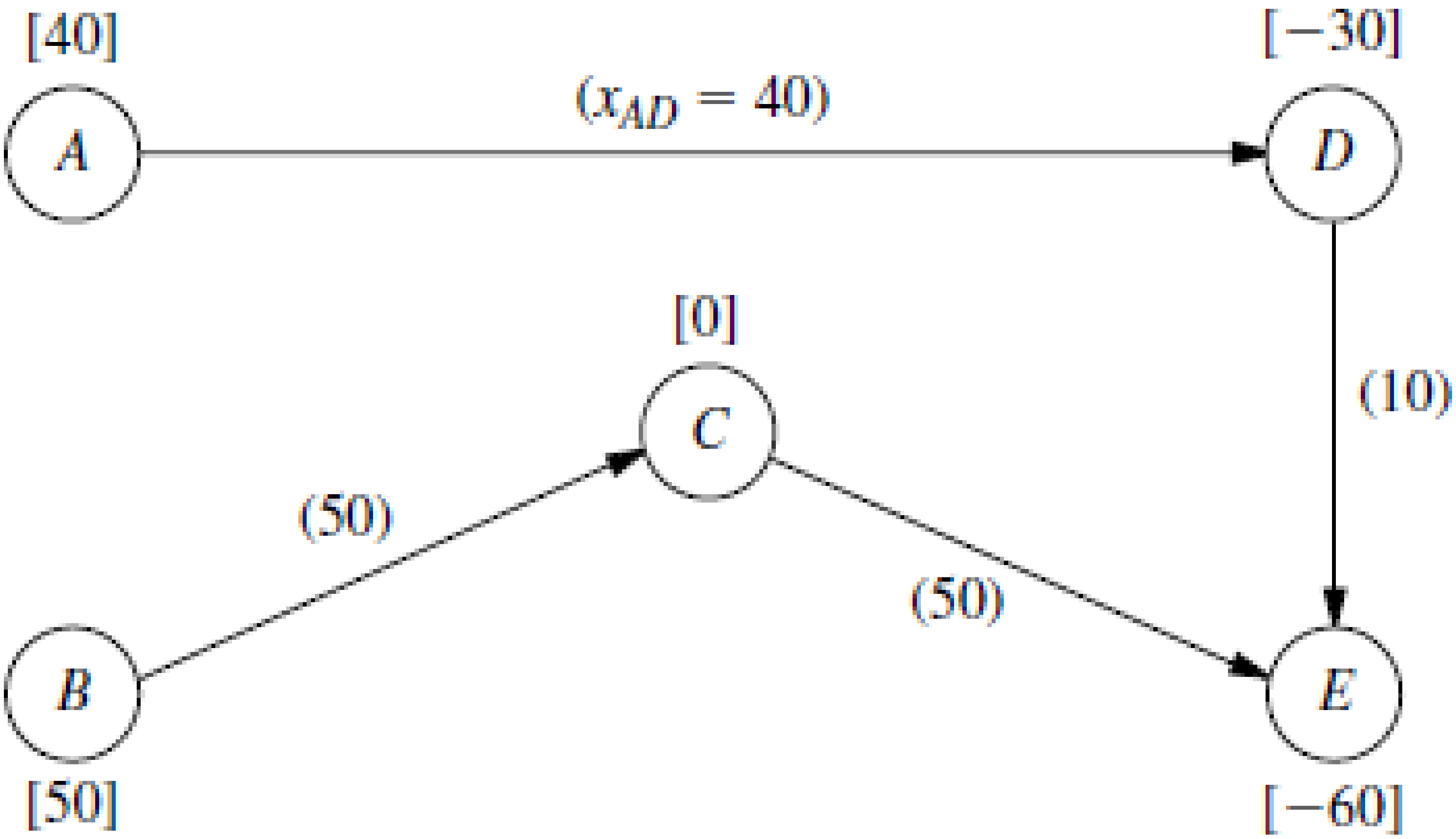


Kezdő megoldás

- A feladat megoldásához szükség van egy kezdő megoldásra

$$
\begin{array}{cccccccccl}
 & & & & & & & y_{AB} = 0 \quad x_{AC} = 0 \quad x_{ED} = 0 & & \\
\hline
-y_{AB} & +x_{AC} & +x_{AD} & & & & & = 40 & \text{so} & x_{AD} = 40 \\
y_{AB} & & & +x_{BC} & & & & = 50 & \text{so} & x_{BC} = 50 \\
 & -x_{AC} & & -x_{BC} & +x_{CE} & & & = 0 & \text{so} & x_{CE} = 50 \\
 & & -x_{AD} & & & +x_{DE} & -x_{ED} & = -30 & \text{so} & x_{DE} = 10 \\
 & & & & -x_{CE} & -x_{DE} & +x_{ED} & = -60 & \text{redundant} &
\end{array}
$$

Kezdő megoldás



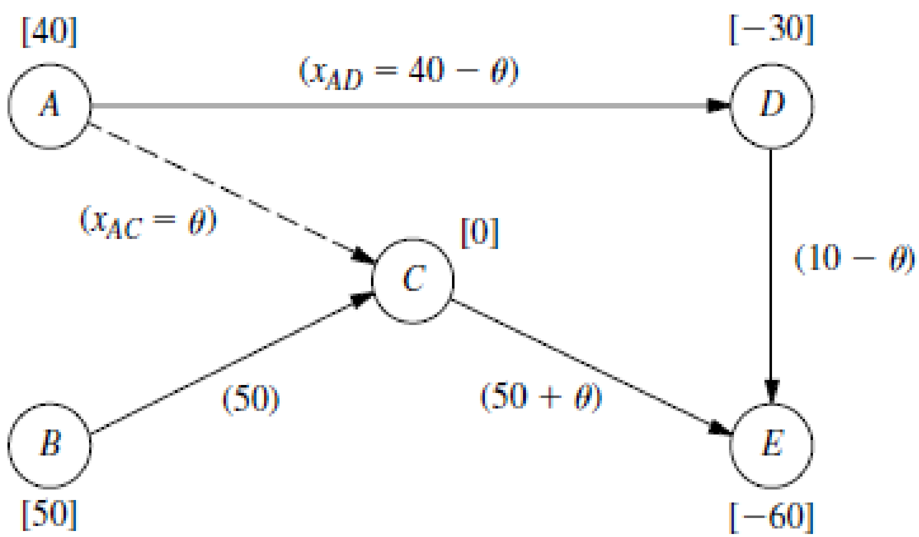
A belépő él kiválasztása

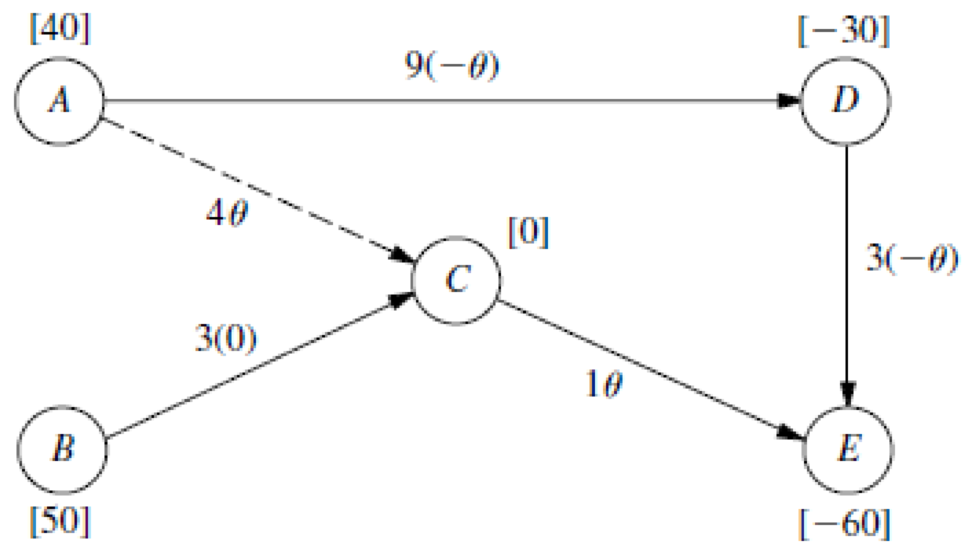
- Hasonlóan a klasszikus szimplex módszerhez, azon élet kell kiválasztani, amely a leginkább javítani fogja a célfüggvény Z értékét
- **Kirchhoff I. tétele:** csomóponti törvény: Egy csomópontba befolyó és onnan kifolyó folyamok algebrai összege mindig nulla
- **Kirchhoff II. tétele:** hurok törvény: Egy zárt hurok mentén a folyamváltozások algebrai összege mindig nulla

A belépő él kiválasztása

- A megfelelő belépő él kiválasztásához az összes bázison kívüli élet meg kell vizsgálni egyesével
- Az aktuális bázison kívüli élre programozzunk θ egységnyi forgalmat
- Ezután vizsgáljuk, hogy hogyan változik a bázisváltozók forgalma Kirchoff törvényeinek megfelelően
- Ezután megvizsgáljuk a célfüggvény Z értékében bekövetkezett változást

A belépő él kiválasztása – az AC él vizsgálata





$$\Delta Z = c_{AC}\theta + c_{CE}\theta - c_{DE}\theta - c_{AD}\theta = 4\theta + \theta - 3\theta - 9\theta = -7\theta$$

$$\Delta Z = \begin{cases} -7 \text{ ha } \Delta x_{AC} = 1 \\ 6 \text{ ha } \Delta y_{AB} = 1 \\ -1 \text{ ha } \Delta x_{ED} = 1 \end{cases}$$

A kilépő él megválasztása

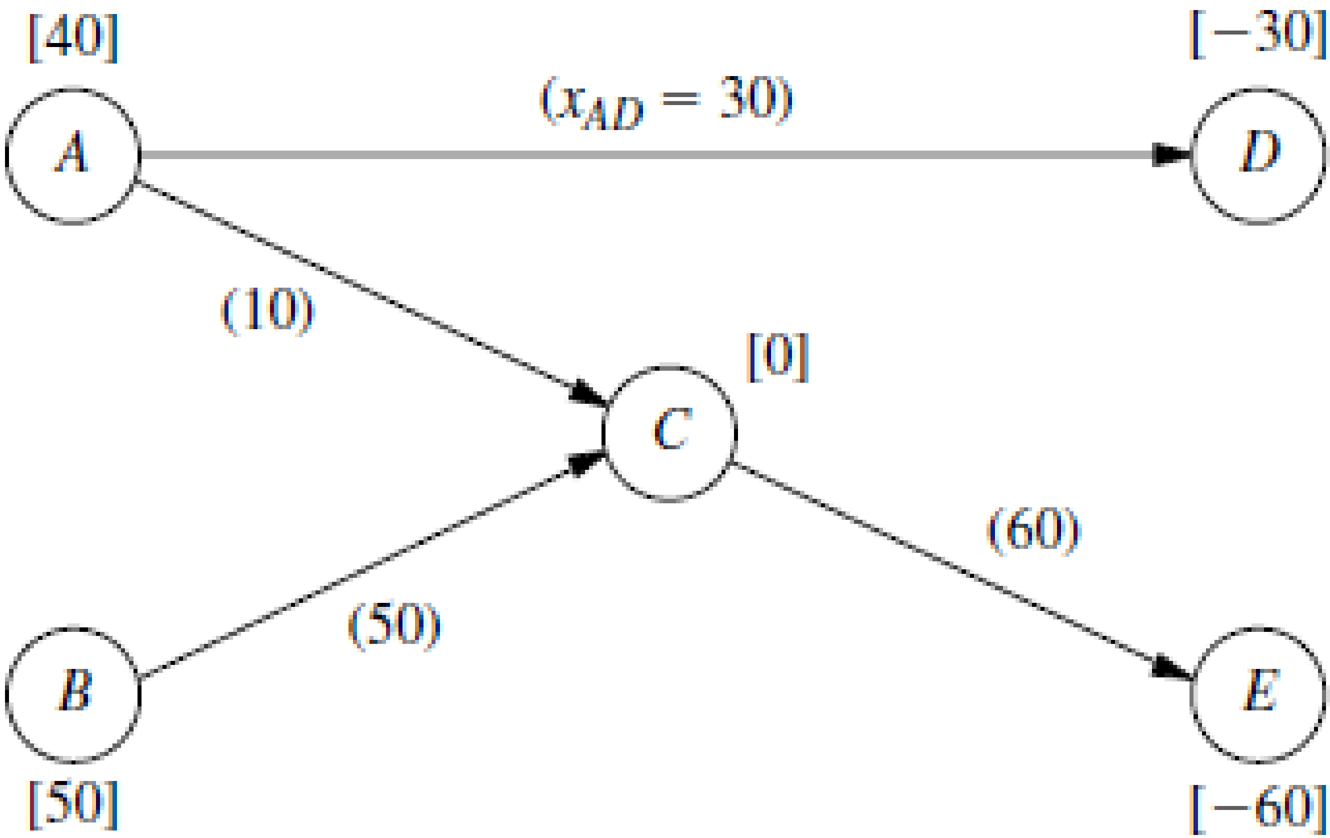
- Az első lépés a θ maximális értékének kiválasztása, amely mellett az egyéb feltételek még teljesülnek
- Ha az adott élen a forgalom csökken, akkor a $0 \leq x_{ij}$, ha pedig nő, akkor a $x_{ij} \leq u_{ij}$ feltételnek kell teljesülnie

A kilépő él megválasztása

$$x_{AC} = \theta \leq \infty$$
$$x_{CE} = 50 + \theta \leq 80, \text{ so } \theta \leq 30$$
$$x_{DE} = 10 - \theta \geq 0, \text{ so } \theta \leq 10$$
$$x_{AD} = 40 - \theta \geq 0, \text{ so } \theta \leq 40$$

- Ahhoz, hogy minden feltételt kielégítsünk, a $\theta = 10$ lesz a megfelelő választás
- Mivel nemnegativitási feltétel a legszigorúbb korlát, így a felső korlát technikát ebben a lépésben nem kell alkalmazni

Az első lépés utáni megoldás



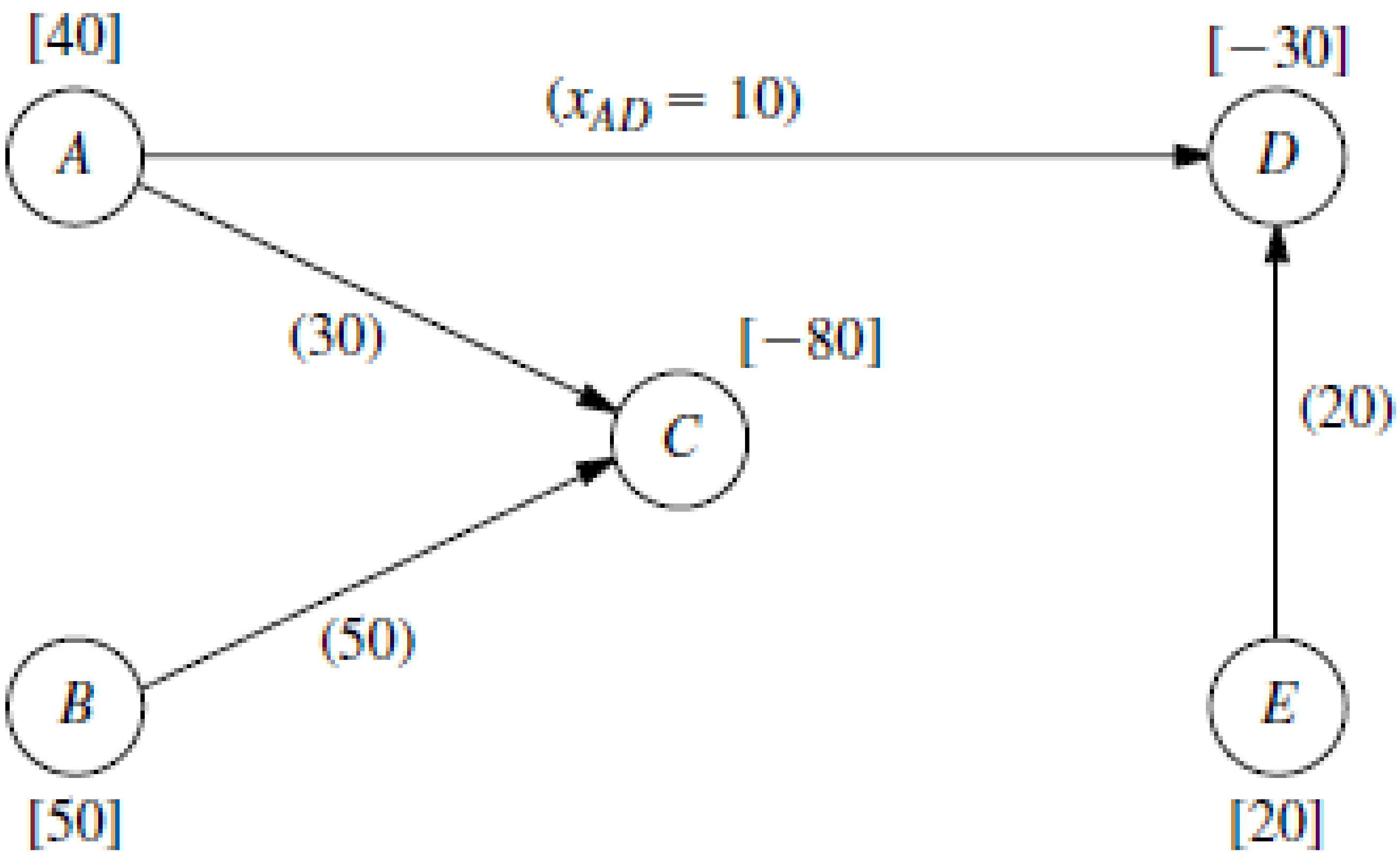
2. lépés

$$\Delta Z = \begin{cases} 7 \text{ ha } \Delta x_{DE} = 1 \\ -1 \text{ ha } \Delta y_{AB} = 1 \\ -2 \text{ ha } \Delta x_{ED} = 1 \end{cases}$$

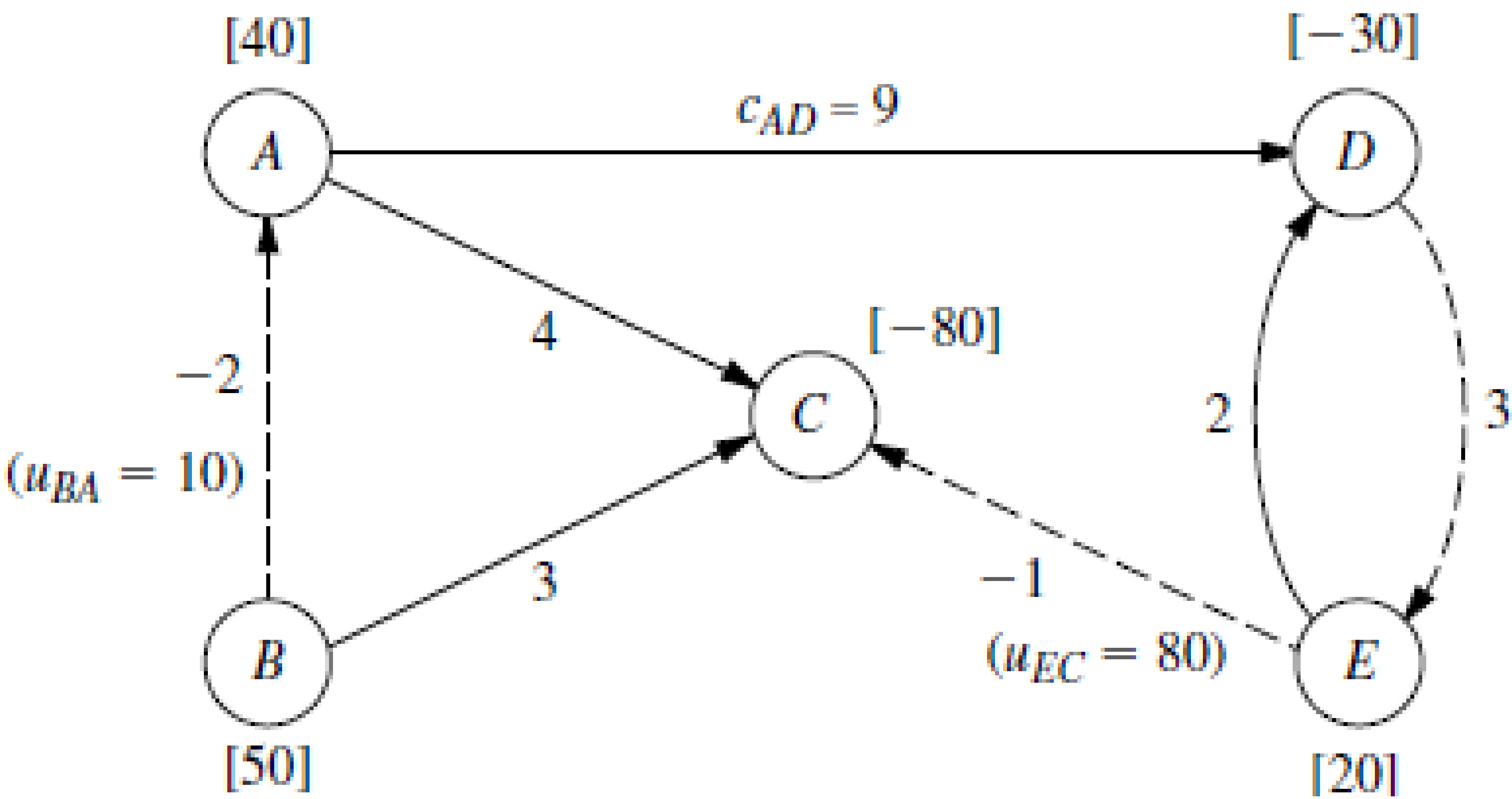
$$x_{ED} = \theta \leq \infty, \text{so } \theta \leq \infty$$
$$x_{AD} = 30 - \theta \geq 0, \text{so } \theta \leq 30$$
$$x_{AC} = 10 + \theta \leq \infty, \text{so } \theta \leq \infty$$
$$x_{CE} = 60 + \theta \leq 0, \text{so } \theta \leq 20$$

- Mivel a legszigorúbb korlát egy felső korlát volt, a felső korlát technikát kell alkalmazni

2. lépés – Eredmény



2. lépés – Eredmény



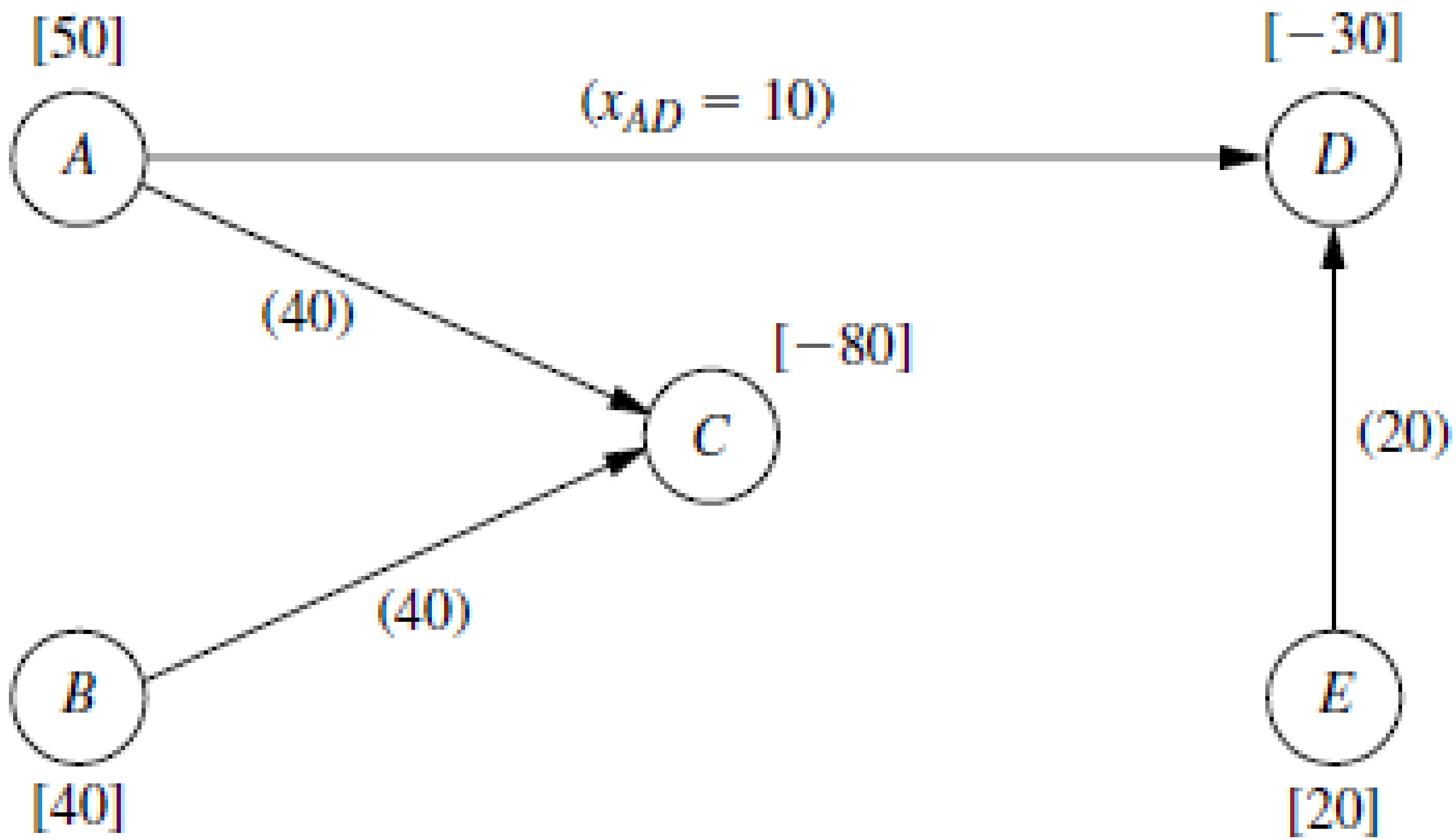
3. lépés

$$\Delta Z = \begin{cases} 5 \text{ ha } \Delta x_{DE} = 1 \\ -1 \text{ ha } \Delta y_{AB} = 1 \\ 2 \text{ ha } \Delta y_{EC} = 1 \end{cases}$$

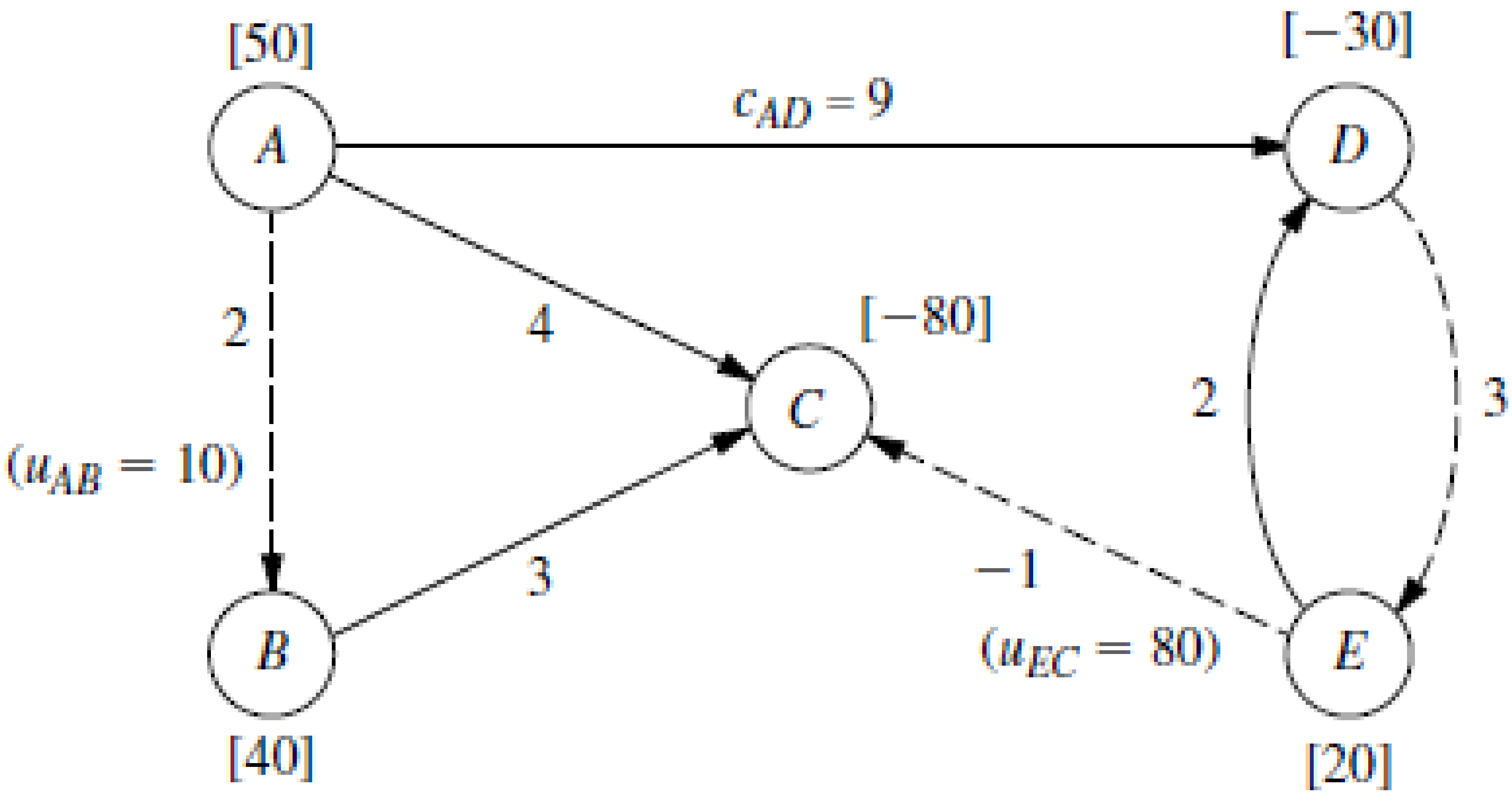
$$y_{AB} = \theta \leq 10, \text{so } \theta \leq 10$$
$$x_{AC} = 30 + \theta, \text{so } \theta \leq \infty$$
$$x_{BC} = 50 - \theta \geq 0, \text{so } \theta \leq 50$$

- Mivel a legszigorúbb korlát egy felső korlát volt, a felső korlát technikát kell alkalmazni

3. lépés – Eredmény



3. lépés – Eredmény

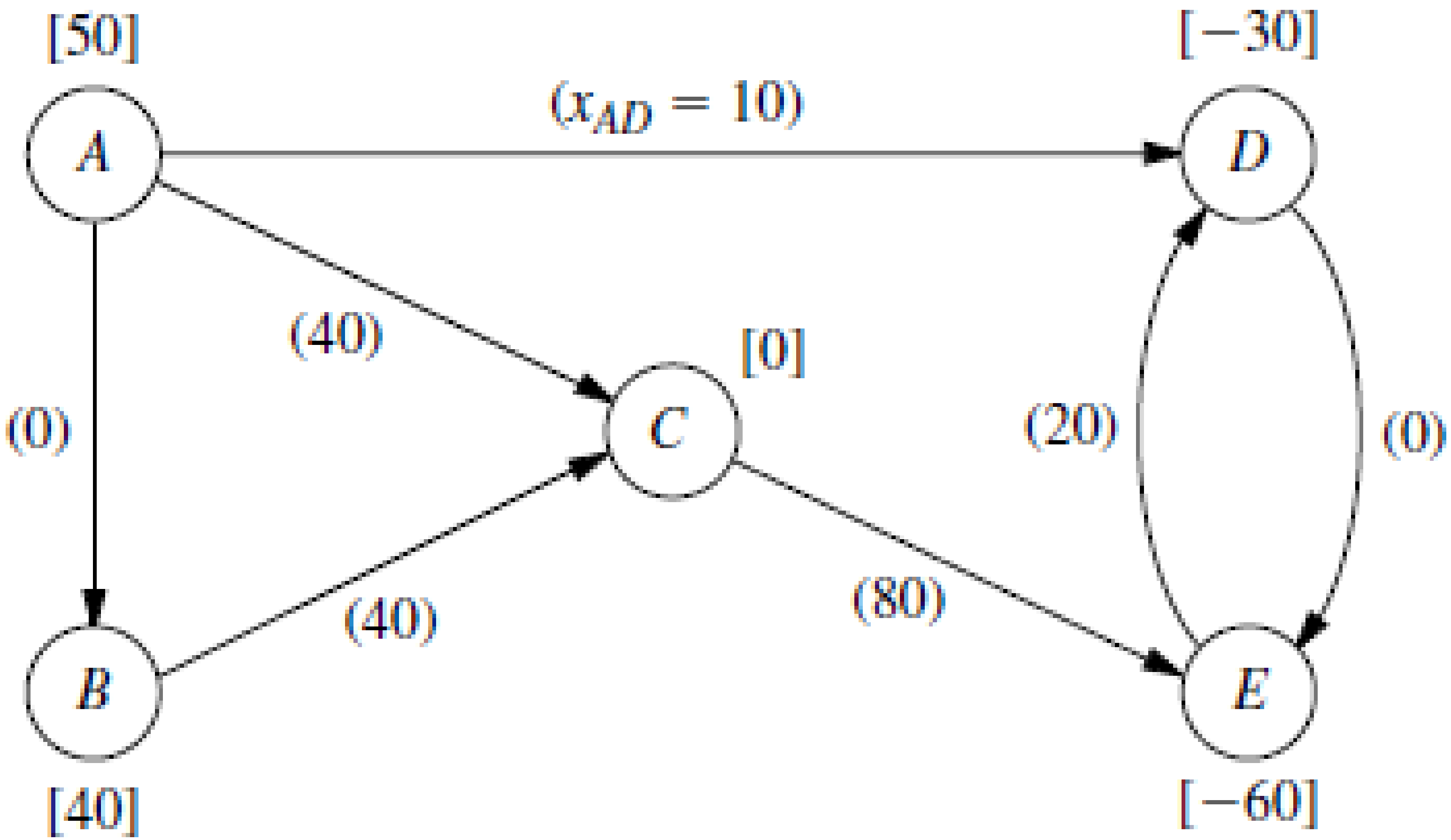


4. lépés

$$\Delta Z = \begin{cases} 1 \text{ ha } \Delta x_{AB} = 1 \\ 7 \text{ ha } \Delta x_{DE} = 1 \\ 2 \text{ ha } \Delta y_{EC} = 1 \end{cases}$$

- Egyik új él bevonása esetén sem csökken a célfüggvény értéke
- Elértük az optimális megoldást

Optimális megoldás



Összegzés

<table>
<tr><th colspan="8">Minimális költségű folyam feladat</th></tr>
<tr><th colspan="5">Szállítási feladat</th><th rowspan="2">Legrövidebb út keresés</th><th rowspan="2">Legnagyobb áteresztő-képesség</th><th rowspan="2">Minimális költségű folyam feladat</th></tr>
<tr><th colspan="3">Szállítási feladat</th><th colspan="2">Hozzárendelési feladat</th></tr>
<tr><td colspan="3">Streamlined szimplex módszer</td><td colspan="2">Magyar módszer</td><td rowspan="2">Dijkstra módszer</td><td rowspan="2">Ford-Fulkerson módszer</td><td rowspan="2">Hálózati szimplex módszer</td></tr>
<tr><td>Északnyugati sarok</td><td>Dantzig módszer</td><td>Vogel módszer</td><td>Maradéktag módszer</td><td>Címkézési módszer</td></tr>
</table>

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.
Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.
SZABÓ Zsombor
2019

email: szabo.zsombor@mail.bme.hu

KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET!

A képek és a példafeladatok forrása

- Hillier F. S, Lieberman G. J. The Maximum Flow Problem. In: Hillier F. S, Lieberman G. J. Introduction to Operations Research. 7th ed. New York: McGrow-Hill; 2001. p. 420-429. ISBN: 0-07-232169-5
- Hillier F. S, Lieberman G. J. The Minimum Cost Flow Problem. In: Hillier F. S, Lieberman G. J. Introduction to Operations Research. 7th ed. New York: McGrow-Hill; 2001. p. 429-438. ISBN: 0-07-232169-5