

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM



DÖNTÉSELŐKÉSZÍTŐ MÓDSZEREK A KÖZLEKEDÉSBEN

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.

Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.

SZABÓ Zsombor

2019



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

SZÁLLÍTÁSI FELADAT – MAGYAR MÓDSZER



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Magyar módszer

- Degenerált feladatok nem megoldhatók a Streamlined Simplex módszerrel
- Magyar módszer
- Harold W. Kuhn találta fel, amikor König Dénes könyvét olvasta
- Az alapötlet – Egerváry Jenő tétele – ezen könyv lábjegyzetében volt megemlítve



Mátrix redukció

- Sorrend:

– Piros

– Zöld

	1	2	3	4	5	
1	6 4 3 1 0 3 3 0 0 5 5	3 1 0 3 3	5 3 3	2 0 0	7 5 5	2
2	3 2 1 6 5 3 3	7 6 5	4 3 3	4 3 3	1 0 0	1
3	5 4 3 1 0 2 2 0 0 5 5	2 1 0	3 2 2	1 0 0	6 5 5	1
4	3 1 0 3 2 0 0 1 1 0 0	5 3 2	2 0 0	3 1 1	2 0 0	2
	1	1	0	0	0	



Mátrix redukció

	1	2	3	4	5
1	3	0	3	0	5
2	1	5	3	3	0
3	3	0	2	0	5
4	0	2	0	1	0



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0	3	0	5	200
2	1	5	3	3	0	80
3	3	0	2	0	5	130
4	0	2	0	1	0	90
	30	210	60	80	120	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0	80
3	3	0	2	0	5	130
4	0	2	0	1	0	90
	30	10	60	80	120	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0	2	0	5	130
4	0	2	0	1	0	90
	30	10	60	80	40	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0	5	120
4	0	2	0	1	0	90
	30	0	60	80	40	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1		200				0
	3	0	3	0	5	
2					80	0
	1	5	3	3	0	
3		10		80		40
	3	0	2	0	5	
4						90
	0	2	0	1	0	
	30	0	60	0	40	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0 ⁸⁰	5	40
4	0 ³⁰	2	0	1	0	60
	0	0	60	0	40	



Kezdő megoldás

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	3	0	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0	0
3	3	0	2	0	5	40
4	0	2	0	1	0	0
	0	0	0	0	40	



Magyar módszer – Fedővonalrendszer

- Maradéktag (discrepancy): a kimaradó igény a sorokban/oszlopokban a programozási lépés után
- A fedővonalrendszer célja hogy az összes nullát lefedjük a lehető legkevesebb vonallal
- Kezdő lépés: az összes oszlop lefedése ahol a maradéktag 0



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0 ⁸⁰	5	40
4	0 ³⁰	2	0 ⁶⁰	1	0	0
	0	0	0	0	40	



Magyar módszer – Fedővonalrendszer

- Ha a nem lefedett 0 sorának maradéktagja 0
- A nem lefedett 0 kiválasztása
- Sorának lefedése
- A megfelelő oszlopok fedésének eltávolítása, hogy ne legyen kétszeresen fedett 0
- A megváltozott fedésű 0-k csillagozása
- Ha a nem lefedett 0 sorának maradéktagja nem 0
- A nullák nem fedhetők le a fedővonalrendszer szabályai alapján
- Javítóutat kell keresni



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0 ⁸⁰	5	40
4	0 ³⁰	2	0 ⁶⁰	1	0	0
	0	0	0	0	40	



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0 ⁸⁰	5	40
4	0 ³⁰	2	0 ⁶⁰	1	0	0
	0	0	0	0	40	



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	3	0 ²⁰⁰	3	0	5	0
2	1	5	3	3	0 ⁸⁰	0
3	3	0 ¹⁰	2	0 ⁸⁰	5	40
4	* 30		* 60			0
	0	2	0	1	0	
	0	0	0	0	40	



Magyar módszer – maradéktag 0

- A fedetlen elemek közül kiválasztjuk a legkisebbet
- Ezen értéket kivonjuk a fedetlen elemekből
- Ezen értéket hozzáadjuk a kétszeresen fedett elemekhez



Régi táblázat

	1	2	3	4	5
1	3	0	3	0	5
2	1	5	3	3	0
3	3	0	2	0	5
4	0	2	0	1	0



Új táblázat

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	3
2	1	7	3	5	0
3	1	0	0	0	3
4	0	4	0	3	0



Kezdő megoldás

	1	2	3	4	5	
1	1	0 ²⁰⁰	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0 ⁸⁰	0
3	1	0 ¹⁰	0 ⁶⁰	0 ⁶⁰	3	0
4	0 ³⁰	4	0	3	0 ⁴⁰	20
	0	0	0	20	0	



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	0 ²⁰⁰	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0 ⁸⁰	0
3	1	0 ¹⁰	0 ⁶⁰	0 ⁶⁰	3	0
4	0 ³⁰	4	0	3	0 ⁴⁰	20
	0	0	0	20	0	



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	* 200	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	10	60	60	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	



Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	* 200	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	10	* 60	60	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	



Javítóút

- Z_0 : a fedetlen nulla cella
- Z_1 : csillagozott 0 a Z_0 oszlopában
- Z_2 : csillagozatlan 0 a Z_1 sorában
- Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg a csillagozatlan 0 oszlopában a maradéktag nagyobb, mint 0
- Ezután meg kell határozni a minimumát a maradéktagoknak és a csillagozott cellákra programozott forgalmaknak (jelen esetben 20)
- Az összes csillagozott elem értékét csökkenteni, míg a csillagozatlan elemek értékét növelni kell ezen értékkel a javítóúton belül, majd az összes fedővonalat törölni kell



Javítóút

- Z_0 : 43-as cella
- Z_1 : 33-as cella
- Z_2 : 32-es cella
- Z_3 : 12-es cella
- Z_4 : 14-es cella

	1	2	3	4	5	
1	1	* 200	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	10	* 60	60	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	



Optimális megoldás

	1	2	3	4	5		
1		* 180		20		0	
	1	0	1	0	3		
2					80	0	
	1	7	3	5	0		
3		30	* 40	60		0	
	1	0	0	0	3		
4		30		20		40	0
	0	4	0	3	0		
	0	0	0	0	0		



Alternatív optimum – Javítóút

- Z_0 : 43-as cella
- Z_1 : 33-as cella
- Z_2 : 34-es cella

	1	2	3	4	5	
1	1	* 200	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	10	* 60	60	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	



Alternatív optimum – Optimális megoldás

	1	2	3	4	5	
1	1	* 200 0	1	0	3	0
2	1	7	3	5	⁸⁰ 0	0
3	1	¹⁰ 0	* 40 0	⁸⁰ 0	3	0
4	³⁰ 0	4	²⁰ 0	3	⁴⁰ 0	0
	0	0	0	0	0	



Alternatív optimum – Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	0 ²⁰⁰	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0 ⁸⁰	0
3	1	0 ¹⁰	0 ⁶⁰	0 ⁶⁰	3	0
4	0 ³⁰	4	0	3	0 ⁴⁰	20
	0	0	0	20	0	



Alternatív optimum – Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	0	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	0	0	0	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	

Additional values in the table:

- 200 in cell (1,2)
- 80 in cell (2,5)
- * 10 in cell (3,2)
- * 60 in cell (3,3)
- 60 in cell (3,4)
- 30 in cell (4,1)
- 40 in cell (4,5)



Alternatív optimum – Fedővonalrendszer

	1	2	3	4	5	
1	1	0	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	0	0	0	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	

Additional values from the image:

- 200 (top of cell 1,2)
- 80 (top of cell 2,5)
- * 10 (top of cell 3,2)
- * 60 (top of cell 3,3)
- 60 (top of cell 3,4)
- 30 (left of cell 4,1)
- 40 (left of cell 4,5)



Alternatív optimum – Javítóút

- Z_0 : 43-as cella
- Z_1 : 33-as cella
- Z_2 : 34-as cella

	1	2	3	4	5	
1	1	0	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0	0
3	1	* 10	* 60	60	3	0
4	0	4	0	3	0	20
	0	0	0	20	0	

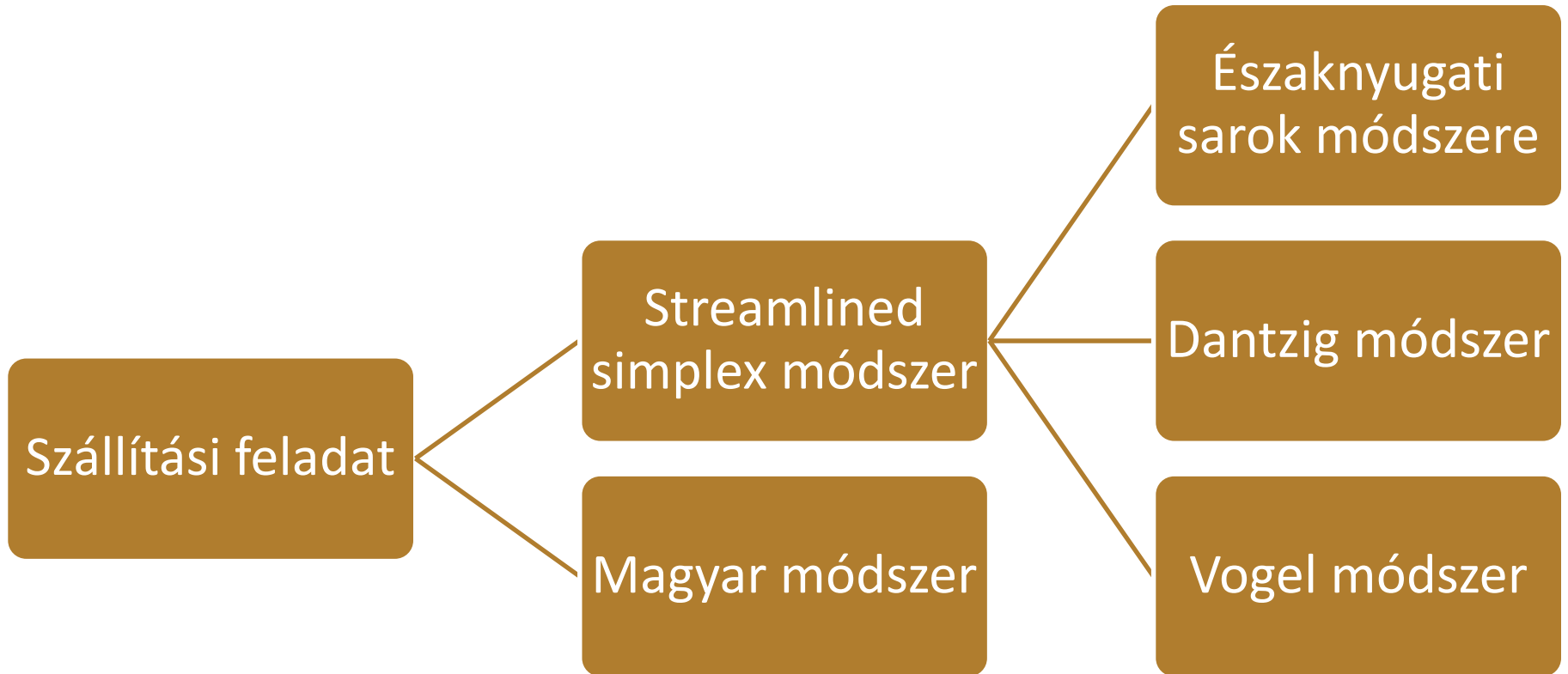


Alternatív optimum – Optimális megoldás

	1	2	3	4	5	
1	1	0 ²⁰⁰	1	0	3	0
2	1	7	3	5	0 ⁸⁰	0
3	1	* 10	* 40	80	3	0
4	0 ³⁰	4	0 ²⁰	3	0 ⁴⁰	0
	0	0	0	0	0	



Összefoglalás



HOZZÁRENDELÉSI FELADAT



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Hozzárendelési feladat

- Cél: n embernek n munkához való hozzárendelése optimális módon
 - Minden embernek van egy számszerű teljesítménymutatója minden munkára
 - A teljesítményalapú megközelítés problémája, hogy ebben az esetben a célfüggvényt maximalizálni kellene, ezért a következő átírás alkalmazandó

$$c'_{ij} = \max_{i,j} c_{ij} - c_{ij} \quad \forall i, j$$

- A hozzárendelési feladat a szállítási feladat egy speciális változata, az alábbi két feltétellel:
 - $a_i = b_j = 1 \quad \forall i, j$
 - $x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall i, j$



Lineáris programozási feladat

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall j$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \forall i, j$$



HOZZÁRENDELÉSI PROBLÉMA – CÍMKÉZÉSI ELJÁRÁS



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Példafeladat

	1	2	3	4
1	6	1	3	4
2	2	5	7	1
3	4	1	2	6
4	5	2	4	8



Mátrix redukció

- Hasonlóan a magyar módszerhez
- A sorok minimumának összege (5), és a második lépésben az oszlopok minimumának összege (2) összeadva (7) egy alsó korlátot biztosít a teljes feladatra
- Sorrend:
 - Piros
 - Zöld

	1	2	3	4	
1	6 5 4	1 0 0	3 2 1	4 3 3	1
2	2 1 0	5 4 4	7 6 5	1 0 0	1
3	4 3 2	1 0 0	2 1 0	6 5 5	1
4	5 3 2	2 0 0	4 2 1	8 6 6	2
	1	0	1	0	5 2



Programozás

- Megengedhető cella:
 $c_{ij} = 0$
- Köttött cella (csillagozott nulla): $x_{ij} = 1$
- Ha nincs csillagozott nulla a vizsgált cella sorában vagy oszlopában akkor csillagozzuk
- Csillagozott nullák (kötött elemek)
- Csillagozatlan megengedhető cellák

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Programozás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Fedővonalrendszer

- A fedővonalrendszer kialakítása ugyanúgy fontos lépés, mint a magyar módszer esetében
- A korábban bemutatott klasszikus magyar módszer (maradéktag módszer) lépései ebben az esetben is használhatók
- Speciális módosítás a hozzárendelési problémára



Címkézési módszer

- Cél: fedővonalrendszer kialakítása
- Első lépés annak a sornak a megjelölése „-” jellel, ahol nincsenek kötött elemek
- A megjelölt sorban a csillagozatlan nulla megkeresése (legalább egynek mindenképp lennie kell)
- Azt az oszlopot, ahol a csillagozatlan nulla van (a megjelölt sorban) címkézzük a sor sorszámával
- Megkeressük a csillagozatlan nulla oszlopában a csillagozott elemet (piros háttérű cella) és a sort címkézzük az oszlop sorszámával, ahol a kötött elem található
- Addig folytatjuk, amíg az összes sort és oszlopot címkézzük, vagy addig amíg nem találunk egy olyan sort, ahol nincs csillagozatlan nulla
- Két lehetséges kimenetel
 - A címkézés egy sorban ér véget
 - A címkézés egy oszlopban ér véget



Címkézési módszer

	1	2	3	4	sign
1	4	0	1	3	
2	0	4	5	0	
3	2	0	0	5	
4	2	0	1	6	-
sign					



Címkézési módszer

	1	2	3	4	sign
1	4	0	1	3	
2	0	4	5	0	
3	2	0	0	5	
4	2	0	1	6	-
sign		4			



Címkézési módszer

	1	2	3	4	sign
1	4	0	1	3	2
2	0	4	5	0	
3	2	0	0	5	
4	2	0	1	6	-
sign		4			



A címkézés egy sorban ér véget

- Lefedjük
 - Címkézett oszlopokat
 - Nem címkézett sorokat
- A fedetlen elemek közül kiválasztjuk a legkisebbet
 - Kivonjuk a fedetlen elemekből
 - Hozzáadjuk a kétszeresen fedett elemekhez

	1	2	3	4	sign
1	4	0	1	3	2
2	0	4	5	0	
3	2	0	0	5	
4	2	0	1	6	-
sign		4			



A címkézés egy sorban ér véget

	1	2	3	4
1	3	0	0	2
2	0	5	5	0
3	2	1	0	5
4	1	0	0	5



További lépések

	1	2	3	4	sign
1	3	0	0	2	
2	0	5	5	0	
3	2	1	0	5	
4	1	0	0	5	
sign					



További lépések

	1	2	3	4	sign
1	3	0	0	2	2
2	0	5	5	0	
3	2	1	0	5	3
4	1	0	0	5	-
sign		4	4		



További lépések

	1	2	3	4	sign
1	3	0	0	2	2
2	0	5	5	0	
3	2	1	0	5	3
4	1	0	0	5	-
sign		4	4		



További lépések

	1	2	3	4
1	2	0	0	1
2	0	6	6	0
3	1	1	0	4
4	0	0	0	4



További lépések

	1	2	3	4	sign
1	2	0	0	1	
2	0	6	6	0	
3	1	1	0	4	
4	0	0	0	4	
sign					



További lépések

	1	2	3	4	sign
1	2	0	0	1	2
2	0	6	6	0	1
3	1	1	0	4	3
4	0	0	0	4	-
sign	4	4	4	2	



A címkézés egy oszlopban ér véget

- Fedővonalrendszer nem alakítható ki
- Megkeressük hol ért véget az eljárás
- A címke számnak megfelelő sor (2. sor) kiválasztandó
- A csillagozott cellák csillagozatlanok lesznek és fordítva
- Az utolsó oszlop (ahol a címkézés véget ért) csillagozatlan nullája csillagozott lesz
- A '-' sorban az egyik nulla ezáltal csillagozhatóvá válik
- Lényegében egy javítóutat találunk

	1	2	3	4	sign
1	2	0	0	1	2
2	0	6	6	0	1
3	1	1	0	4	3
4	0	0	0	4	-
sign	4	4	4	2	



A címkézés egy oszlopban ér véget

	1	2	3	4
1	2	0	0	1
2	0	6	6	0
3	1	1	0	4
4	0	0	0	4



Megoldás

	1	2	3	4
1	6	1	3	4
2	2	5	7	1
3	4	1	2	6
4	5	2	4	8



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6



Emlékeztető

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6

Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	4	0	1	3
2	0	4	5	0
3	2	0	0	5
4	2	0	1	6

Címkézési eljárás



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	2	0	1	1
2	0	6	7	0
3	0	0	0	3
4	0	0	1	4



Alternatív megoldás – Maradéktag eljárás

	1	2	3	4
1	6	1	3	4
2	2	5	7	1
3	4	1	2	6
4	5	2	4	8



Összefoglalás

Szállítási feladat						
Szállítási feladat			Hozzárendelési feladat			
Streamlined simplex módszer			Magyar módszer			
Északnyugati sarkok módszere	Dantzig módszer	Vogel módszer	Maradéktag eljárás	Címkézési eljárás		
Programozás	Programozás	Különbség paraméter meghatározása	Mátrix redukció			
		Programozás	Programozás			
			Fedővonalrendszer kialakítása	Címkézés		
Disztribúciós eljárás			Maradéktag 0	Maradéktag nem 0	Sorban ér véget	Oszlopban ér véget
Sokszög kialakítása a potenciálrendszer alapján			Mátrix transzformáció	Javítóút keresése	Fedővonalrendszer kialakítása	Javítóút keresése
A forgalmak újraprogramozása a sokszög alapján				Forgalmak átprogramozása	Mátrix transzformáció	Forgalmak átprogramozása



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.

Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.

SZABÓ Zsombor

2019



email: torok.arpad@mail.bme.hu

KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET!



BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING