BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

MŰEGYETEM 1782

DÖNTÉSELŐKÉSZÍTŐ MÓDSZEREK A KÖZLEKEDÉSBEN

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.
Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.
SZABÓ Zsombor

2019

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

SZÁLLÍTÁSI FELADAT

MŰEGYETEM 1782

A szállítási feladat alapjai

- Az egyik legelső lineáris programozási (linear programming – LP) feladat
- Alap probléma
  - Egy vállalat m helyen állít elő termékeket (a_i, $i = 1, \dots, m$)
  - Amelyeket n különböző felhasználási helyre szeretne elszállítani (b_j, $j = 1, \dots, n$)
- Cél: a termékek elszállítása a gyártási helyről a felhasználási helyre a lehető legalacsonyabb költséggel
  - c_{ij}: egységnyi szállítási költség az i helyről a j helyre
  - $c_{ij}x_{ij}$: x_{ij} egység szállítási költsége az i helyről a j helyre

Lineáris programozási feladat

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ \ and \ a_i \geq 0, b_j \geq 0$$

Egészértékűségi tulajdonság

- **Tétel:** ha egy szállítási feladatban minden kapacitáskorlát (a_i és b_j) egészértékű, akkor minden megengedhető megoldásnak is egészértékű elemei lesznek

SZÁLLÍTÁSI FELADAT – STREAMLINED SIMPLEX METHOD

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Streamlined Simplex Method

- Táblázatos formátumú megoldás
- Valós problémák $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$
  - Nem mindig teljesül
  - Mesterséges (dummy) változó bevezetése szükséges
- Két lépés
  - Kezdő megoldás
  - Disztribúciós módszer

i \ j	1	2	…	j	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	

Példafeladat

c_{ij}	1	2	3	4	5	
1	6	3	5	2	7	200
2	3	7	4	4	1	80
3	5	2	3	1	6	130
4	3	5	2	3	2	90
	30	210	60	80	120	

SZÁLLÍTÁSI FELADAT – STREAMLINED SIMPLEX METHOD – KEZDŐ MEGOLDÁS

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Kezdő megoldás azonosítása

- Nem az a cél, hogy az optimális, hanem hogy egy kezdő megoldást találjunk
- Módszerek
  - Északnyugati sarok módszere (Northwest corner route)
  - Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)
  - Vogel módszer (Legnagyobb különbség módszere)

Északnyugati sarok módszere

- A lehető legnagyobb forgalmat terhelünk a bal felső sarokra (11-es cella)
  - Ha $b_1 > a_1$, akkor a 21-es cellával kell folytatni
  - Ha $b_1 < a_1$, akkor a 12-es cellával kell folytatni

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	200
2	0	40	40	0	0	80
3	0	0	20	80	30	130
4	0	0	0	0	90	90
	30	210	60	80	120	

$$30 * 6 + 170 * 3 + 40 * 7 + 40 * 4 + 20 * 3 + 80 * 1 + 30 * 6 + 90 * 2 = 1630$$

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0	0	0	0	0	200
2	0	0	0	0	0	80
3	0	0	0	0	0	130
4	0	0	0	0	0	90
	30	210	60	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	0	0	0	0	170
2	0	0	0	0	0	80
3	0	0	0	0	0	130
4	0	0	0	0	0	90
	0	210	60	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	80
3	0	0	0	0	0	130
4	0	0	0	0	0	90
	0	40	60	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	0	0	0	40
3	0	0	0	0	0	130
4	0	0	0	0	0	90
	0	0	60	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	40	0	0	0
3	0	0	0	0	0	130
4	0	0	0	0	0	90
	0	0	20	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	40	0	0	0
3	0	0	20	0	0	110
4	0	0	0	0	0	90
	0	0	0	80	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	40	0	0	0
3	0	0	20	80	0	30
4	0	0	0	0	0	90
	0	0	0	0	120	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	40	0	0	0
3	0	0	20	80	30	0
4	0	0	0	0	0	90
	0	0	0	0	90	

Északnyugati sarok módszere

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	170	0	0	0	0
2	0	40	40	0	0	0
3	0	0	20	80	30	0
4	0	0	0	0	90	0
	0	0	0	0	0	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

- Feladat: a lehető legnagyobb forgalom programozása a legkisebb költségű cellákra
- Sorrend:
  - Piros
  - Narancssárga
  - Zöld
  - Lila

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30	160	0	0	10	40 0
2	0	0	0	0	80	0
3	0	50	0	80	0	50 0
4	0	0	60	0	30	0
	0	160 0	0	0	40 10	

$$30 * 6 + 160 * 3 + 10 * 7 + 80 * 1 + 50 * 2 + 80 * 1 + 60 * 2 + 30 * 2 = 1170$$

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^6	0^3	0^5	0^2	0^7	200
2	0^3	0^7	0^4	0^4	0^1	80
3	0^5	0^2	0^3	0^1	0^6	130
4	0^3	0^5	0^2	0^3	0^2	90
	30	210	60	80	120	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^6	0^3	0^5	0^2	0^7	200
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	0
3	0^5	0^2	0^3	80^1	0^6	50
4	0^3	0^5	0^2	0^3	0^2	90
	30	210	60	0	40	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^6	0^3	0^5	0^2	0^7	200
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	0
3	0^5	50^2	0^3	80^1	0^6	0
4	0^3	0^5	60^2	0^3	30^2	0
	30	160	0	0	10	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^6	160^3	0^5	0^2	0^7	40
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	0
3	0^5	50^2	0^3	80^1	0^6	0
4	0^3	0^5	60^2	0^3	30^2	0
	30	0	0	0	10	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^6	160^3	0^5	0^2	0^7	40
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	0
3	0^5	50^2	0^3	80^1	0^6	0
4	0^3	0^5	60^2	0^3	30^2	0
	30	0	0	0	10	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	0^{6}	160^{3}	0^{5}	0^{2}	0^{7}	40
2	0^{3}	0^{7}	0^{4}	0^{4}	80^{1}	0
3	0^{5}	50^{2}	0^{3}	80^{1}	0^{6}	0
4	0^{3}	0^{5}	60^{2}	0^{3}	30^{2}	0
	30	0	0	0	10	

Legkisebb költség módszere (Dantzig módszer)

x_{ij}	1	2	3	4	5	
1	30^6	160^3	0^5	0^2	10^7	0
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	0
3	0^5	50^2	0^3	80^1	0^6	0
4	0^3	0^5	60^2	0^3	30^2	0
	0	0	0	0	0	

Vogel módszer

- Különbség paraméter: a legkisebb és a második legkisebb költségértékek (c_{ij}) különbsége az adott sorban
- Kiválasztjuk a sort/oszlopot ahol a különbség paraméter a legnagyobb
- Az adott sorból/oszlopból kiválasztjuk a legkisebb költségű elemet

$$200 * 3 + 80 * 1 + 10 * 2 + 40 * 3 + 80 * 1 + 30 * 3 + 20 * 2 + 40 * 2 = 1110$$

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i	
1	0^6	0^3	0^5	0^2	0^7	200	1
2	0^3	0^7	0^4	0^4	0^1	80	2
3	0^5	0^2	0^3	0^1	0^6	130	1
4	0^3	0^5	0^2	0^3	0^2	90	0
b_j	30	210	60	80	120		
	0	1	1	1	1		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i	
1	0^6	0^3	0^5	0^2	0^7	200	1
2	$-^3$	$-^7$	$-^4$	$-^4$	80^1	0	-
3	0^5	0^2	0^3	0^1	0^6	130	1
4	0^3	0^5	0^2	0^3	0^2	90	0
b_j	30	210	60	80	40		
	2	1	1	1	4		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5		
1	0^{6}	0^{3}	0^{5}	0^{2}	$-^{7}$	200	1
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	0^{5}	0^{2}	0^{3}	0^{1}	$-^{6}$	130	1
4	0^{3}	0^{5}	0^{2}	0^{3}	40^{2}	50	1
	30	210	60	80	0		
	2	1	1	1	-		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i	
1	$-^{6}$	0^{3}	0^{5}	0^{2}	$-^{7}$	200	1
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	$-^{5}$	0^{2}	0^{3}	0^{1}	$-^{6}$	130	1
4	30^{3}	0^{5}	0^{2}	0^{3}	40^{2}	20	1
b_j	0	210	60	80	0		
	-	1	1	1	-		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5		
1	$-^{6}$	0^{3}	0^{5}	$-^{2}$	$-^{7}$	200	2
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	$-^{5}$	0^{2}	0^{3}	80^{1}	$-^{6}$	50	1
4	30^{3}	0^{5}	0^{2}	$-^{3}$	40^{2}	20	3
	0	210	60	0	0		
	-	1	1	-	-		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5		
1	$-^{6}$	0^{3}	0^{5}	$-^{2}$	$-^{7}$	200	2
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	$-^{5}$	0^{2}	0^{3}	80^{1}	$-^{6}$	50	1
4	30^{3}	$-^{5}$	20^{2}	$-^{3}$	40^{2}	0	-
	0	210	40	0	0		
	-	1	2	-	-		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5		
1	$-^{6}$	200^{3}	$-^{5}$	$-^{2}$	$-^{7}$	0	-
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	$-^{5}$	0^{2}	0^{3}	80^{1}	$-^{6}$	50	
4	30^{3}	$-^{5}$	20^{2}	$-^{3}$	40^{2}	0	-
	0	10	40	0	0		
	-			-	-		

Vogel módszer

x_{ij}	1	2	3	4	5	a_i	
1	$-^{6}$	200^{3}	$-^{5}$	$-^{2}$	$-^{7}$	0	-
2	$-^{3}$	$-^{7}$	$-^{4}$	$-^{4}$	80^{1}	0	-
3	$-^{5}$	10^{2}	40^{3}	80^{1}	$-^{6}$	0	-
4	30^{3}	$-^{5}$	20^{2}	$-^{3}$	40^{2}	0	-
b_j	0	0	0	0	0		
	-	-	-	-	-		

SZÁLLÍTÁSI FELADAT – STREAMLINED SIMPLEX METHOD – DISZTRIBÚCIÓS MÓDSZER

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Potenciál rendszer

$$p_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$$

- $p_{ij} = 0$ a kötött cellákban (ahová programoztunk)
- Egy sornak vagy oszlopnak a potenciál-értékét önkényesen megválasztjuk
- Sorrend:
  - Piros
  - Narancssárga
  - Zöld

x_{ij}	1	2	3	4	5	u_i
1	30^6	160^3	0^5	0^2	10^7	0
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	6
3	0^5	50^2	0^3	80^1	0^6	1
4	0^3	0^5	60^2	0^3	30^2	5
v_j	6	3	7	2	7	

- A példa során a Dantzig módszer eredményét fogjuk felhasználni

Potenciál rendszer

$$p_{ij} = c_{ij} - v_j + u_i$$

- Potenciálérték: a várható egységnyi változása a célfüggvény-értéknek (Z)
- A legkisebb negatív értéket célszerű kiválasztani
- Ha a legkisebb elem 0, vagy pozitív, akkor nincs jobb megoldás

	1	2	3	4	5	u_i
1			-2^{5}	0^{2}		0
2	3^{3}	10^{7}	3^{4}	8^{4}		6
3	0^{5}		-3^{3}		0^{6}	1
4	2^{3}	7^{5}		6^{3}		5
v_j	6	3	7	2	7	

Sokszög felrajzolása

- Egy sokszöget kell felvenni a táblázatba
- Egyik sarka a kiválasztott cellában (most 33)
- A többi sarka kötött cellákon
- A sarkok megjelölése ‚+' és ‚-' jelekkel felváltva
- A ‚+' jellel a kiválasztott cellában kell kezdeni

x_{ij}	1	2	3	4	5
1	30	+ 160			10 -
2					80
3		50 -	+	80	
4			60 -		30 +

Aktuális megoldás

- A ‚-’ jellel megjelölt cellák közül a legkisebbet (x_{ij}) kell választani
- Ezt a mennyiséget adjuk a ‚+’ jellel jelöltekhez, és kivonjuk a ‚-’ jellel jelöltekből
- A Z értéke az átprogramozott forgalom és a kiválasztott potenciál értékének szorzatával fog változni

x_{ij}	1	2	3	4	5
1	30	170			
2					80
3		40	10	80	
4			50		40

$$30*6+170*3+80*1+40*2+20*3+80*1+50*2+40*2=1140$$

Potenciál rendszer

- Sorrend:
  - Piros
  - Narancssárga
  - Zöld
  - Lila
  - Kék
  - Barna

x_{ij}	1	2	3	4	5	u_i
1	30^6	170^3	0^5	0^2	0^7	0
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	3
3	0^5	40^2	10^3	80^1	0^6	1
4	0^3	0^5	50^2	0^3	40^2	2
v_j	6	3	4	2	4	

Potenciál rendszer

p_{ij}	1	2	3	4	5	u_i
1	X	X	1^5	0^2	3^7	0
2	0^3	7^7	3^4	5^4	X	3
3	0^5	X	X	X	3^6	1
4	-1^3	4^5	X	3^3	X	2
v_j	6	3	4	2	4	

Sokszög felrajzolása

x_{ij}	1	2	3	4	5
1	- 30	170 +			
2					80
3		40 -	10 +	80	
4	+		50 -		40

Aktuális megoldás

x_{ij}	1	2	3	4	5
1		200			
2					80
3		10	40	80	
4	30		20		40

Potenciál rendszer

- Sorrend:
  - Piros
  - Narancssárga
  - Zöld
  - Lila
  - Kék
  - Barna

x_{ij}	1	2	3	4	5	u_i
1	0^6	200^3	0^5	0^2	0^7	0
2	0^3	0^7	0^4	0^4	80^1	3
3	0^5	10^2	40^3	80^1	0^6	1
4	30^3	0^5	20^2	0^3	40^2	2
v_j	5	3	4	2	4	

Potenciál rendszer

p_{ij}	1	2	3	4	5	u_i
1	1^6		1^5	0^2	3^7	0
2	1^3	7^7	3^4	5^4		3
3	1^5				3^6	1
4		4^5		3^3		2
v_j	5	3	4	2	4	

Optimális megoldás

x_{ij}	1	2	3	4	5
1		200			
2					80
3		10	40	80	
4	30		20		40

SZÁLLÍTÁSI FELADAT – PÉLDÁK

MŰEGYETEM 1782

BUDAPEST UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND ECONOMICS
FACULTY OF TRANSPORTATION ENGINEERING AND VEHICLE ENGINEERING

Példák – Gyakorlati megoldások

- Dummy változót kell bevezetni
  - Sorösszeg és oszlopösszeg vizsgálata
  - VAGY új kiindulópont VAGY új célpont bevezetése a hiányzó termékmennyiséggel
  - A dummy változó csupán egy mesterséges változó, azt jelenti, hogy azon igények nem lesznek kielégítve
- Ha az ij útvonal nem megengedett
  - A táblázatban általában M jelzéssel jelöljük
  - A Solverben más megközelítés szükséges

Példák – Solver

- Feltételek
  - A sorösszegeknek egyenlőnek kell lennie
  - Az oszlopösszegeknek egyenlőnek kell lennie
  - Nemnegativitási feltétel
  - Speciális feltétel a nem megengedhető útvonalakra
    - Nemnegativitás: $x_{ij} \geq 0 \; \forall i, j$
    - Speciális feltétel: $x_{ij} \leq 0$ a nem megengedhető útvonalakra
    - Ha $x_{ij} \geq 0$ és $x_{ij} \leq 0$, akkor $x_{ij} = 0$ a nem megengedhető útvonalakra

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. SIPOS Tibor Ph.D.
Dr. TÖRÖK Árpád Ph.D.
SZABÓ Zsombor
2019

email: szabo.zsombor@mail.bme.hu

MŰEGYETEM 1782

KÖSZÖNJÜK A FIGYELMET!