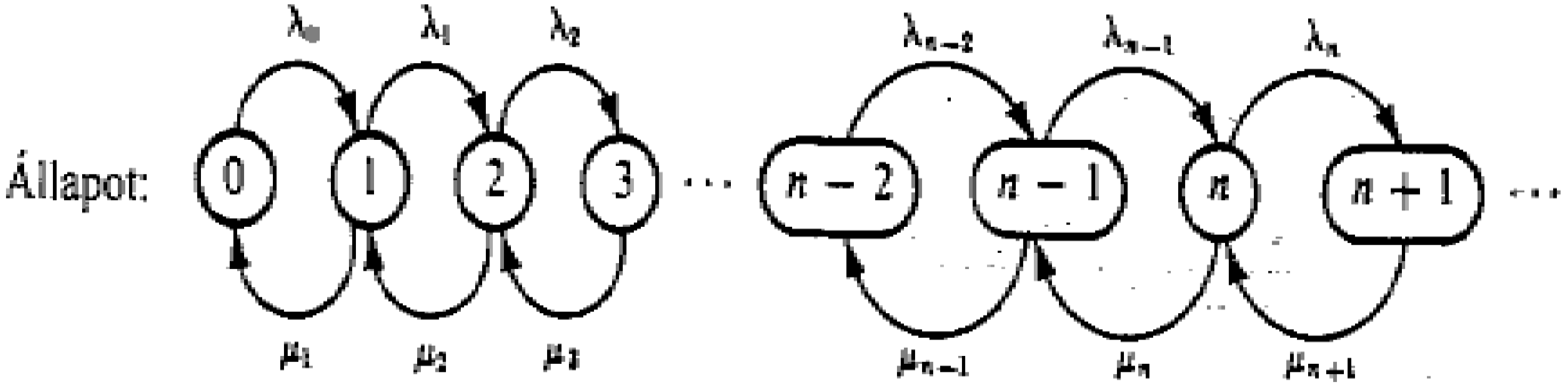
Sorbanállási feladat

Markov láncok

1. FELTEVÉS. Ha $N(t)=n$, akkor a következő születésig (érkezésig) hátralevő időnek a pillanatnyi valószínűségi eloszlása λ_n paraméterű *exponenciális* eloszlás (n=0,1,2,...).

2. FELTEVÉS. Ha $N(t)=n$, akkor a következő elhalálozásig (munka befejezésig) hátralevő időnek a pillanatnyi valószínűségi eloszlása μ_n paraméterű *exponenciális* eloszlás (n=0,1,2,...).



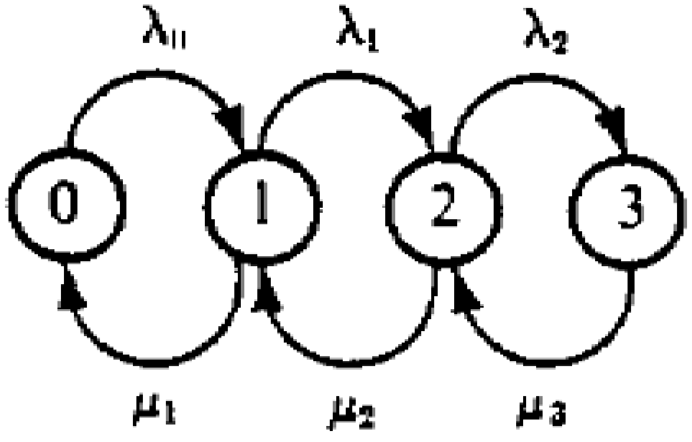
***16.4 ábra* A születési-halálozási folyamat gyakorisági diagramja**

3. FELTEVÉS. Csak *egyetlen* születés vagy elhalálozás következhet be egy időpontban.

Forrás: Hillier-Lieberman: Bevezetés az operációkutatásba

- *Állapot* *Bemenő gyakoriság=Kimenő gyakoriság*

- 0 $\mu_1 * P_1=\lambda_0 * P_0$
- 1 $\lambda_0 * P_0+\mu_2 * P_2=\lambda_1 * P_1+\mu_1 * P_1$
- 2 $\lambda_1 * P_1+\mu_3 * P_3=\lambda_2 * P_2+\mu_2 * P_2$
- Stb…



Ebből:

$$P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1} * P_0$$

$$P_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2} * P_1+\frac{1}{\mu_2} * \overbrace{(\mu_1 * P_1-\lambda_0 * P_0)}^{0}=\frac{\lambda_1}{\mu_2} * P_1=\frac{\lambda_1 * \lambda_0}{\mu_2 * \mu_1} * P_0$$

stb…

$$P_3=\frac{\lambda_2}{\mu_3} * P_2+\frac{1}{\mu_3} * (\mu_2 * P_2-\lambda_1 * P_1)=\frac{\lambda_2}{\mu_3} * P_2=\frac{\lambda_2 * \lambda_1 * \lambda_0}{\mu_3 * \mu_2 * \mu_1} * P_0$$

P_n meghatározása

- Mivel $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots$
- És $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=\ldots$

- $P_n=(\frac{\lambda}{\mu})^n * P_0 = \rho^n * P_0$

P_0 kiszámítása

- $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$
- $P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n P_0 = 1$

- $(1+\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n) * P_0 = 1$
- $P_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n}$
- $P_0 = (\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n)^{-1} = (\frac{1}{1-\rho})^{-1}$
- $P_0 = 1-\rho$

P_n kiszámítása

- Mivel
- $P_n=\rho^n*P_0$
- $P_n=\rho^n*(1-\rho)$

- Következésképpen:

- $n_s = \sum_{n=0}^{\infty} n * Pn$

- $n_s = \sum_{n=0}^{\infty} n * (1-\rho) * \rho^n$
- $n_s = (1-\rho) * \rho * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho} (\rho^n)$
- $n_s = (1-\rho) * \rho * \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (\rho^n)$
- $n_s = (1-\rho) * \rho * \frac{d}{d\rho} (\frac{1}{1-\rho})$
- $n_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\lambda}}$

- Hasonlóan
- $n_l=\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)*Pn$
- $n_l=n_s-1*(1-P_0)$
- $n_l=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$